ARISTÓTELES

SOBRE LAS LÍNEAS INDIVISIBLES • MECÁNICA

*

EUCLIDES

ÓPTICA • CATÓPTRICA • FENÓMENOS

INTRODUCCIONES, TRADUCCIÓN Y NOTAS DE

PALOMA ORTIZ GARCÍA



EDITORIAL GREDOS

BIBLIOTECA CLÁSICA GREDOS, 277

Asesor para la sección griega: Carlos García Gual.

Según las normas de la B. C. G., la traducción de este volumen ha sido revisada por Jaime Curbera.

Sánchez Pacheco, 85, Madrid, 2000.
www.editorialgredos.com

Depósito Legal: M. 24780-2000.

ISBN 84-249-2265-4.

Impreso en España. Printed in Spain.
Gráficas Cóndor, S. A.
Esteban Terradas, 12. Polígono Industrial. Leganés (Madrid), 2000.

PRÓLOGO

El presente volumen ofrece cinco trabajos poco divulgados atribuidos a dos de las mentes más preclaras del mundo antiguo, Aristóteles y Euclides. Cinco tratados que, en apariencia, se ocupan de materias muy diversas. Efectivamente, el debate *Sobre las líneas indivisibles* y su existencia o inexistencia nos puede parecer una cuestión propia de la filosofía; la astronomía, materia de los *Fenómenos,* es desde hace siglos una ciencia independiente; la mecánica y la óptica sobre las que versan los otros tres tratados son, también desde hace mucho tiempo, ramas separadas dentro de la física.

La primera razón para publicar juntas estas obras es de carácter literario: como característica literaria común presentan la de ser obras menores de autores de primera fila, al menos en la atribución de los antiguos; veremos después los problemas de autoría que conciernen a cada tratado.

La segunda razón, de más peso, es de carácter histórico-filológico, y nos la ofrece un texto de Herón *(Definitiones,* pág. 165), que es quien aporta el criterio para plantear la cuestión en sus justos términos: al considerar cuántas son las partes de la matemática, distingue entre una matemática «más honorable y primera», formada por la aritmética y la

geometría, y otra «que se ocupa de lo sensible» y que consta de seis partes: la logística, la geodesia, la canónica, la óptica, la mecánica y la astronomía. Esta clasificación de las ciencias procede, seguramente, del período helenístico, pero sus antecedentes parciales son más antiguos, y podemos encontrarlos en un pasaje de la *República* platónica que comentaremos más adelante y en la *Física* aristotélica, en donde la óptica, la armonía y la astronomía son consideradas «las ramas de la matemática más próximas a la ciencia natural».

Desde este planteamiento, cuatro de los tratados que ofrecemos en este volumen tienen en común, según el punto de vista de los griegos de la Antigüedad, el hecho de pertenecer a la matemática «que se ocupa de lo sensible»: son la *Mecánica* aristotélica y los tratados euclidianos de *Óptica, Catóptrica* y *Fenómenos*. Todos ellos comparten, además, la característica de ser los más antiguos que se nos conservan sobre las materias a que se refieren.

El tratado *Sobre las líneas indivisibles* tiene que ver, más bien, con la matemática «más honorable y primera». Al leer en los *Elementos* las Definiciones 2 y 3 del Libro I, que afirman que «una línea es longitud sin anchura» y «los extremos de una línea son puntos», lo inmediato es preguntarse: «Y entonces la línea, ¿de qué está hecha?». Es difícil responder a esa pregunta sin que la respuesta nos lleve a la contradicción y seguramente por eso la dejó Euclides sin responder. Pero tal planteamiento no puede proceder de una intuición genial; ser consciente de ese hecho requiere reflexión y contraste de argumentos. Y eso es precisamente lo que nos ofrece el tratado *Sobre las líneas indivisibles:* el testimonio de los debates previos indispensables para levantar sobre fundamentos sólidos el formidable monumento lógico que son los *Elementos*.

En estos tratados se encuentran, por tanto, los resultados de los esfuerzos de los primeros pensadores por someter nuestro conocimiento sobre el mundo a un tratamiento formal que nos permita explicar la realidad, predecirla y dominarla mediante la razón. En algunos de ellos, incluso, como en la *Óptica* y la *Catóptrica* de Euclides, encontramos enunciados algunos de los principios básicos de esas materias, tan vigentes hoy como hace más de dos mil años y en los *Fenómenos* veremos cómo las hipótesis de los pitagóricos y el desarrollo de la Esférica se unen para descubrir aplicaciones sumamente valiosas en el estudio de lo concerniente a los astros; tan valiosas, que sus planteamientos seguirían vigentes, en lo fundamental, hasta Copérnico y Galileo.

El hecho de que estas obras se consideren secundarias dentro del conjunto de los trabajos de sus autores les hace tener otros rasgos comunes, como son el menguado número de traducciones a las lenguas modernas y la escasez de estudios literarios o filológicos que se les han dedicado. La *Mecánica* y el tratado *Sobre las líneas indivisibles* aún no cuentan con traducción francesa; en inglés no hay traducción de la *Catóptrica,* la *Óptica* ha sido publicada una sola vez —en una versión sin notas aparecida en una revista especializada— y los *Fenómenos* han sido vertidos por primera vez a esta lengua en 1996. En español, sólo la *Óptica* y la *Catóptrica* fueron impresas, con las limitaciones de que daremos cuenta en el lugar correspondiente, en el siglo XVI; la *Mecánica* fue traducida en la misma época, pero la versión no llegó a pasar a la imprenta.

En cuanto a los estudios de que han sido objeto, baste decir que hemos de remontarnos casi un siglo para encontrar los nombres de dos especialistas familiarizados a fondo con estas materias: Heath, el gran historiador de la matemática

griega, traductor y comentador de los *Elementos* y estudioso de la obra aristotélica, y Heiberg, el filólogo danés editor de textos matemáticos y científicos; la mayor parte de los autores posteriores no han ido más allá del comentario puntual de algún pasaje o el estudio concreto de una de las obras; en el mejor de los casos, de una de las materias.

Precisamente por el escaso número de ediciones, traducciones y estudios que se les han dedicado, cuestiones de gran importancia siguen pendientes de ser dilucidadas. En los últimos tiempos han aparecido varios trabajos relativos a las ilustraciones que debían acompañar a los textos antiguos: en general, para señalar la poca atención que se les ha prestado. Las obras que presentamos no son excepción: no existe ningún trabajo de conjunto sobre las ilustraciones para las obras de Euclides, ni tampoco relativo a las ilustraciones de una de las obras concretas, ni se han publicado trabajos basados en las ilustraciones que den cuenta de las relaciones entre manuscritos... El caso de los dos tratados aristotélicos va más allá: la *Mecánica* hace referencia a las figuras; el tratado *Sobre las líneas indivisibles* menciona cuestiones matemáticas que los manuscritos antiguos abordan siempre con la ayuda de ilustraciones; pero los manuscritos conservados carecen de figuras.

Abordar en profundidad y con seriedad esas cuestiones queda fuera de los objetivos perseguidos en esta colección, pero debemos reclamar la atención del lector sobre ese punto y señalarlo entre las tareas pendientes de los filólogos. No habiendo nosotros llevado a cabo colación de manuscritos, en las obras de Euclides nos hemos limitado a reproducir las figuras que aparecen en la edición de Heiberg, la que hemos tomado como base para nuestra traducción, y en los tratados de Aristóteles hemos incluido figuras que son obra nuestra —y que no difieren mucho de las ofrecidas

por otros traductores, puesto que las indicaciones del texto son, en general, inequívocas—; van junto al cuerpo de los escritos cuando en ellos se hace referencia a la ilustración; de otro modo, las figuras aparecen en las notas.

Y una última cuestión: aun reconociendo que resulta más que tópico al hablar de los griegos de la época clásica reconocer en ellos a los padres del pensamiento, el arte y la ciencia occidentales, también hemos de aceptar que, si en cuestión de pensamiento y arte cualquier ciudadano conoce, al menos someramente, las obras más destacadas y los nombres de sus autores, cuando nos aproximamos al terreno de lo científico el asunto ya varía. Los nombres de Euclides, Arquímedes o Ptolomeo sí son conocidos para la mayor parte de las personas cultas, pero es probable que ni siquiera los estudiosos de lo antiguo puedan enumerar los títulos de las obras de cada uno de ellos. Y los científicos, por su parte, suelen prestar más atención a las investigaciones para el futuro que a los logros del pasado. Por ello hemos considerado conveniente, en la presentación de cada uno de estos opúsculos, ofrecer una breve aproximación general al desarrollo de las materias que en ellos se tratan, de manera que el lector pueda más fácilmente apreciar el valor de cada escrito *per se* y en el marco histórico de la ciencia que desarrollan. La importancia *absoluta* de los descubrimientos de los antiguos ha ido quedando menguada con los avances posteriores, pero su importancia *relativa* sigue siendo inmensa, y se hace perceptible cuando se la contempla a la luz de su tiempo y sus antecedentes inmediatos.

No puedo dejar de expresar aquí mi agradecimiento a los profesores Mariano Martínez y Antonio Arribas, que han tenido la gentileza de leer algunas de las traducciones que siguen y ayudarme a subsanar algunos errores.

BIBLIOGRAFÍA

I. EDICIONES

1. Del tratado *«Sobre las líneas indivisibles»*

O. Apelt, *Aristotelis Opuscula,* Leipzig, 1888.

I. Bekker, *Aristotelis opera edidit Academia Regia Borussica,* cinco vols., Berlín, 1831-1870.

W. S. Hett, *On indivisible lines,* en *Aristotle. Minor Works,* Loeb Classical Library, Londres-Cambridge (Massachussetts), 1963.

M. Timpanaro-Cardini, *Pseudo-Aristotele. De lineis insecabilibus,* con introducción, traducción y comentario a cargo de —.

2. De la *«Mecánica»*

O. Apelt, *Aristotelis Opuscula,* Leipzig, 1888.

I. Bekker, *Aristotelis opera edidit Academia Regia Borussica,* cinco vols., Berlín, 1831-1870.

M. E. Bottechia, *Mechanica,* tradición manuscrita, texto crítico, escolios editados por —, Studia Aristotelica X, Padua, 1982, 172 págs., 18 láminas.

W. S. Hett, *Mechanical Problems,* en *Aristotle. Minor Works,* Loeb Classical Library, Londres-Cambridge (Massachussetts), 1963.

3. De la *«Óptica» y la «Catóptrica»*

I. L. Heiberg, *Euclidis Optica, Opticorum Recensio Theonis, Catoptrica, cum Scholiis Antiquis* en *Euclidis Opera omnia,* vol. VII, Leipzig, Teubner, 1895.

4. De los *«Fenómenos»*

H. Menge, *Phaenomena et Scripta musica,* en *Euclidis Opera omnia,* vol. VIII, Leipzig, Teubner, 1916.

II. TRADUCCIONES

1. Del tratado *«Sobre las líneas indivisibles»*

W. S. Hett, *On indivisible lines,* en *Aristotle. Minor Works,* Loeb Classical Library, Londres-Cambridge (Massachussetts), 1963.
H. H. Joachim, *Concerning indivisible lines,* en *The works of Aristotle translated into English* (W. D. Ross ed.), Oxford, 1913.

2. De la *«Mecánica»*

E. S. Forster, *Mechanica,* en *The works of Aristotle translated into English* (W. D. Ross ed.), Oxford, 1913.
W. S. Hett, *Mechanical problems,* en *Aristotle. Minor Works,* Londres-Cambridge (Massachussetts), 1963.
Hurtado de Mendoça, Diego, *Mechanica de Aristotiles* (traducción al español hecha en Trento en 1545 por el representante de Carlos Quinto en el Concilio); ed. por Foulché-Delbosc, *Revue Hispanique* 5 (1898), 365-405.

3. De la *«Óptica» y la «Catóptrica»*

H. E. Burton, «Euclid's *Optics*», *Journal of the Optical Society* 35 (1945), 357-72.

P. A. ONDÉRIZ, *Perspectiva y Especularia de Euclides,* traducidas por —, Madrid, 1582.

W. R. THEISEN, «*Liber de visu:* The greco-latin translation of Euclid's *Optics*», *Mediaeval Studies* 1979 (41), 44-105.

PAUL VER EECKE,, *L'Optique et la Catoptrique.*- Oeuvres traduites pour la première fois du grec en français avec une introduction et des notes par —. París, 1959.

4. De los «*Fenómenos*»

J. L. BERGGREN, y R. S. D. THOMAS, *Euclid's Phaenomena: A Translation and Study of a Hellenistic Treatise in Spherical Astronomy,* Nueva York-Londres, 1996.

III. SOBRE LA CIENCIA Y LA MATEMÁTICA EN LA ANTIGÜEDAD

M. R. COHEN, y I. E. DRABKIN (ed.), *A Source Book in Greek Science,* Cambridge (Massachussets), 1959.

I. GRATTAN-GUINNESS (ed.), *Companion Encyclopaedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences,* dos vols., Londres-Nueva York, 1994.

TH. HEATH, *A History of Greek Mathematics,* Nueva York, 1981 (reimpresión de la ed. de Oxford, 1921), dos vols.

I. L. HEIBERG, *Geschichte der Mathematik und Naturwissenschaften im Altertum,* Munich, 1925.

—, *Litterargeschichtliche Studien über Euklid,* Leipzig, 1882.

HERÓN, *Definitiones,* ed. HEIBERG, Leipzig, 1912.

A. JONES, art. «Greek Applied Mathematics», en *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences* (ed. I. GRATTAN-GUINNESS), vol. I, págs. 58-63.

G. S. KIRK, y J. E. RAVEN, *Los filósofos presocráticos,* Madrid, 1981[3rp].

G. LORIA, *Le scienze esatte nell'antica Grecia,* Milán, 1914.

D. PAPP, *Historia de la física. Desde la Antigüedad hasta los umbrales del siglo XX.* Madrid, 1961.

PROCLO, *In primum Euclidis Elementorum librum Commentarii,* ed. FRIEDLEIN, Leipzig, 1873.

A. REYMOND, *History of the sciences in Graeco-Roman Antiquity,* Nueva York, 1963.

E. STAMATIS, «Über Euklid, den Mathematiker», *Das Altertum* 9 (1963), 78-84.

R. TATON (dir.), *La science antique et médiévale (Des origines a 1450),* Paris, 1966 = *Historia general de las ciencias;* vol. I, *La ciencia antigua y medieval (de los orígenes a 1450),* [M. SACRISTÁN], Barcelona, 1985.

J. P. VERNANT, «Remarques sur les formes et les limites de la pensée technique chez les Grecs», *Revue d'Histoire des Sciences* 10 (1957), 205-225.

IV. MATEMÁTICAS EN ARISTÓTELES

J. BERTIER, «Les apocryphes mathématiques du corpus aristotélicien», en J.-Y. GUILLAUMIN (ed.), *Mathématiques dans l'Antiquité,* Saint-Étienne, 1992, 27-42.

I. DÜRING, «Aristoteles» en *Real Enkyklopaedie,* Suppbd. XI, 1968.

M. FEDERSPIEL, «Notes exégétiques et critiques sur le traité pseudo-aristotélicien *Des lignes insécables», Revue des Études Grecques* 94 (1981), 502-512.

—, «Note sur le passage 970 a 26-33 du traité pseudo-aristotélicien *Des lignes insécables»,* en J.-Y. GUILLAUMIN (ed.), *Mathématiques dans l'Antiquité,* Saint-Étienne, 1992, págs. 43-50.

W. C. K. GUTHRIE, *A History of Greek Philosophy,* vol. VI, *Aristotle. An encounter,* Cambridge 1981 (v. especialmente págs. 45-49, «Additional note: Aristotle and Mathematics»).

D. HARLFINGER, *Die Textgeschichte der pseudo-aristotelischen Schrift* Περὶ ἀτόμων γραμμῶν, Amsterdam, 1971.

M. HAYDUCK, «De Aristotelis qui fertur περὶ ἀτόμων γραμμῶν libello», *Neue Jahrbücher für Philologie und Paedagogik* 109 (1874), 161-171.

TH. HEATH, *Mathematics in Aristotle,* Nueva York-Londres, 1980 (reimp. de la ed. Oxford, 1949).

R. HEINZE, *Xenokrates. Darstellung der Lehre und Sammlung der Fragmente,* Hildesheim, 1965 (reprod. fotomecánica de la edición de Leipzig, 1892).

W. HIRSCH, *Der pseudo-aristotelische Traktat «De lineis insecabilibus»,* tesis doctoral, Heidelberg, 1953.

P. MORAUX, *Les listes anciennes des ouvrages d'Aristote,* Lovaina, 1951.

P. MORAUX, y J. WIESNER, *Zweifelhaftes im Corpus aristotelicum. Akten des 9. Symposium aristotelicum,* Berlín, 1981.

G. SARTON, *Introduction to the History of Science,* cinco vols., Nueva York, 1975 (reimp. de la ed. de 1927). (Recoge bibliografía —ya anticuada pero aún valiosa— sobre Aristóteles y el Liceo en la que incluye un apartado «Matemáticas»).

M. SCHRAMM, «Zur Schrift über die unteilbaren Linien aus dem Corpus Aristotelicum», en *Classica et Mediaevalia,* 18 (1957), 36-58.

V. FÍSICA Y MECÁNICA

M. CLAGGETT, *Greek Science in Antiquity,* Londres, 1979[6].

F. DE GANDT, «Les méchaniques attribuées à Aristote et le renouveau de la science des machines au XVIe siècle», *Les Études des philosophiques* (1986), 391-405.

H. DIELS, *Antike Technik,* 1920.

A. G. DRACHMANN, *The Mechanical Technology of Greek and Roman Antiquity,* Copenhague, 1963.

S. DRAKE, y P. L. ROSE, «The Pseudo-aristotelician Questions of Mechanics in Renaissance Culture», *Studies in the Renaissance* 18 (1971), 65-104.

S. SAMBURSKY, *The Physical World of the Greeks,* 1956 = *El mundo físico de los griegos* [M. J. PASCUAL PUEYO], Madrid, 1990.

—, *Physical World of Later Antiquity,* Londres, 1962 = *El mundo físico a finales de la Antigüedad* [C. SOLÍS], Madrid, 1990.

VI. ÓPTICA Y CATÓPTRICA

BAUMHAUER, *De sententiis veterum philosophorum Graecorum de visu, lumine et coloribus,* Utrecht, 1843.

C. D. BROWNSON, «Euclid's *Optics* and its compatibiliy with linear perspective», *Archiv of History of Exact Sciences* 24 (1981), 165-194.

E. KHEIRANDISH, «The Mediaeval Arabic tradition of Euclid's *Optika*», tesis doctoral en la Universidad de Harvard. Contiene el texto árabe. Sumario en *Dissertations Abstracts* 52 (1991-92), 1872A-1873A.

W. R. KNORR, «When circles don't look like circles: an optical theorem in Euclid and Pappus», *Archiv for History of Exact Sciences* 44 (1992), 287-329.

—, «Archimedes and the pseudo-Euclidean *Catoptrics*», *Archives Internationales d'Histoire des Sciences* 35 (1985), 28-105.

A. LEJEUNE, *Euclide et Ptolémée. Deux stades de l'optique géometrique grecque,* Universidad de Lovaina, *Recueils de travaux d'histoire et de philologie* III, 31, 1948.

—, *Recherches sur la Catoptrique grecque d'après les sources antiques et médiévales,* Bruselas, Memorias de la Academia Real de Bélgica, tomo LII, fasc. 2, 1957.

D. C. LINDBERG, «Alkindi's critique of Euclid's theory of vision», *Isis* 62 (1971), 469-489.

J. H. LUCE, «Géométrie de la perspective à l'époque de Vitruve», *Révue d'Histoire des Sciences et de leurs applications* 6 (1953), 308-321.

CH. MUGLER, *Dictionnaire historique de la terminologie optique des grecs. Douze siècles de dialogues avec la lumière,* París 1964.

—, «Sur l'histoire de quelques définitions de la géometrie grecque et les rapports entre la géométrie et l'optique», *L'Antiquité classique* 36 (1957), 331-345.

—, «Sur une polémique scientifique dans Aristophane», *Revue des Études Grecques* 72 (1959), 57-66.

—, «La lumière et la vision dans la poésie grecque», *Revue d'Études Grecques* 73 (1960), 40-72.

E. PANOFSKY, *Die Perspektive als symbolische Kunstform,* Leipzig-Berlin, 1927 (= *La perspectiva como forma simbólica,* Barcelona, Tusquets, 1991[6] = *La perspective comme forme symbolique,* Paris, 1975). La traducción francesa cuenta con un interesantísimo prefacio a cargo de M. DALAI EMILIANI sobre *La question de la perspective).*

A. M. SMITH, «The psichology of visual perception in Ptolemy's *Optics*», *Isis* 79 (1988), 189-207.

G. SIMON, *Le regard, l'être et l'apparence dans l'optique de l'antiquité,* París, 1988.

W. R. THEISEN, «*Liber de visu:* the greco-latin translation of Euclid's *Optics*», *Mediaeval Studies* 41 (1979), 44-61 (va acompañado de la versión latina medieval de la *Optica,* que ocupa las páginas 62-105).

—, «Euclid's *Optics* in the mediaeval curriculum», *Archives Internationales d'Histoire des Sciences* 32 (1982), 159-176.

—, «Euclid, relativity and sailing», *Historia Mathematica* 11 (1984), 81-85.

R. TOBIN, «Ancient perspective and Euclid's *Optics*», *Journal of the Wartburg and Courtauld Institutes* 53 (1990), 14-41.

H. WEISSENBORN, «Zur *Optik* des Eukleides», *Philologus* 54 (1886), 54-62.

VII. ASTRONOMÍA

J. L. BERGGREN y R. S. D. THOMAS, «Mathematical Astronomy in the Fourth century BC as found in Euclid's *Phaenomena*», *Physis, Rivista Internazionale di Storia della Scienza* (N.S.) 29 (1992), 7-33.

J. B. J. DELAMBRE, *Histoire de l'astronomie ancienne,* dos vols., París, 1817.

D. R. DICKS, *Early Greek Astronomy to Aristotle,* Londres, 1976.

TH. L. HEATH, *Greek Astronomy,* Nueva York, 1991 (reimp. de la ed. de Londres, 1932).

G. HUXLEY, «The Greek astronomers», *Greek, Roman and Byzantine Studies* 4 (1963), 83-106.

O. NEUGEBAUER, *The Exact Sciences in Antiquity,* U.S.A. 1957.

—, *A History of Ancient Mathematical Astronomy,* Berlin-Heidelberg-Nueva York, 1975.

—, *Astronomy and History, Selected Essays,* Heidelberg, 1983.

A. PÉREZ JIMÉNEZ (ed.), *Astronomía y Astrología: de los orígenes al Renacimiento,* Madrid, 1994.

ARISTÓTELES

SOBRE LAS LÍNEAS INDIVISIBLES

INTRODUCCIÓN

LA AUTORÍA Y EL MARCO ANTIGUO DEL DEBATE

La tradición atribuye a Aristóteles los escritos de tema matemático que ofrecemos ahora, que llevan por título *Sobre las líneas indivisibles* y *Mecánica*, que han sido publicados en los últimos tiempos como parte de lo que se ha dado en llamar las *Obras menores*[1]. Considerados generalmente espurios, presentan ciertos rasgos comunes, como la brevedad y el ocuparse de materias muy precisas. Coinciden además en que todos ellos tratan temas que el propio Aristóteles no había abordado específicamente en sus obras, con lo cual vienen a colmar lagunas que habrían redundado en perjuicio de los trabajos de la escuela y contribuyen, en sentido general, a redondear el carácter enciclopédico del *Corpus*.

El tratado, que sólo en los últimos cien años ha sido objeto de la atención que merece, despertará sin duda el interés

---

[1] Bajo ese título se publican en la edición inglesa de las obras de Aristóteles dirigida por W. D. Ross *(Opuscula)* y la colección Loeb *(Minor Works)*.

de los filólogos y los historiadores de la filosofía y las matemáticas.

Los manuscritos lo atribuyen unánimemente a Aristóteles. Los autores antiguos, sin embargo, no lo mencionan entre las obras del Estagirita, sino que Diógenes Laercio, Simplicio y Filópono lo citan entre las obras de Teofrasto. El acuerdo de estas fuentes no ha convencido, sin embargo, a los especialistas: Zeller opina que el tratado parece haber sido escrito en época de Teofrasto aunque no puede ser obra suya; Heath participa de esa opinión, pero considera también la posibilidad de que el propio Estagirita hubiera encargado a un discípulo la redacción. Los especialistas en Aristóteles en general se refieren a él como pseudo-aristotélico y rechazan tanto la autoría de Teofrasto como la de Eudemo[2], a quien también se había atribuido.

Al plantear la cuestión de la autoría hemos de tomar en consideración las siguientes evidencias textuales: en primer lugar, Aristóteles rechaza en varios pasajes de sus obras la existencia de líneas indivisibles; en segundo lugar, en el tratado aparecen múltiples expresiones que revelan que el autor conocía la obra de Aristóteles[3]; por último, las fuentes tardías afirman unánimemente que la teoría de las líneas indivisibles era obra de Jenócrates. De todo ello cabe deducir que en tiempo de Aristóteles y sus sucesores inmediatos la cuestión debía de ser de completa actualidad. Estos hechos pueden ser tomados como argumentos —aunque secundarios y no concluyentes— a favor de la teoría de Heath según

---

[2] En ese sentido se manifiesta HIRSCH en *Der pseudo-Aristotelische Traktat «De lineis insecabilibus»* (tesis doctoral inédita, Heidelberg, 1953). No he podido consultarlo; lo cito según las referencias de Timpanaro-Cardini.

[3] HIRSCH, *op. cit.*, cap. IX, ofrece un catálogo de esos pasajes.

la cual este escrito sería el resultado del encargo hecho por Aristóteles a un discípulo.

Sea quien sea su autor, ha construido una obra de intención polémica sobre una cuestión que afecta a las bases teóricas de la geometría, tratándola en términos de lógica más que de matemática. A pesar de que no se menciona a Jenócrates, es sumamente verosímil que la polémica fuera dirigida contra él, puesto que era el principal sostenedor de la teoría de las líneas indivisibles.

Timpanaro-Cardini plantea el origen de la cuestión del siguiente modo: los pitagóricos más antiguos consideraban que la estructura de la realidad espacial era un reflejo de la naturaleza discreta de la serie de los números. La mónada, la unidad, no número ella misma, pero generatriz de la serie numérica, podía, una vez transferida al espacio, identificarse con el punto. En la concepción monádica de la realidad, la mónada-punto sería la medida mínima común a dos líneas y éstas, por tanto, serían siempre conmensurables, pero el descubrimiento de los inconmensurables —la diagonal del cuadrado respecto al lado del mismo, el diámetro del círculo respecto a la circunferencia— rompió esta correspondencia y la unidad originaria se transformó en la antinomia finito-infinito.

Lógicamente, los conceptos de punto y línea entraron en crisis de inmediato. Los intentos de avance en el conocimiento de los inconmensurables suscitaron a lo largo del siglo v a. C. debates que dieron origen a diversas especulaciones filosóficas, como las paradojas de Zenón en las que, admitiendo la infinita divisibilidad del continuo, deduce que el ser es uno e inmóvil y, una vez admitido esto, niega la evidencia del movimiento. Las especulaciones eran, otras veces, de carácter matemático, como los estudios de Hipócrates de Quíos sobre la cuadratura de las lúnulas, el intento

de Antifonte de cuadrar el círculo mediante sucesivas aproximaciones de polígonos inscritos y circunscritos o las investigaciones geométricas de Demócrito en relación con el continuo[4]. La polémica sobre la existencia de líneas indivisibles debió de surgir en el marco de estos debates.

Contamos con tres grupos de fuentes que nos permiten reconstruir los argumentos empleados. El primer grupo, el más antiguo y muy próximo en el tiempo al origen de la cuestión, está formado por las referencias que nos han quedado en las obras de Aristóteles; en segundo lugar tendríamos a los comentaristas de la Antigüedad tardía, como Alejandro de Afrodisias, Proclo, Simplicio, Temistio o Filópono[5]; en tercer lugar, el documento que nos ofrece la información más completa, aunque desde luego podría estar dándonos una visión parcial, es el propio tratado *Sobre las líneas indivisibles*.

Aristóteles pone en boca de Platón el término «líneas indivisibles» e indica que éste trató el tema muchas veces, lo que retrotrae el origen del debate al primer tercio del siglo IV a. C., dos generaciones antes de la fecha más probable de nuestro escrito —fines del siglo IV o principios del III a. C.—; testimonia también que Platón consideraba el punto una «mera noción geométrica», lo llamaba «principio de una línea» y utilizaba como sinónimo de «punto» la expresión «líneas indivisibles» (*Metafísica* I 9, 992 a 20).

Frente al testimonio aristotélico, los comentaristas tardíos concuerdan en señalar como autor de la teoría de las lí-

[4] Uno de los problemas que planteó fue el siguiente: si se corta un cono mediante un plano paralelo a la base ¿cómo serán las dos secciones, iguales o desiguales? Si son desiguales, la superficie exterior del cono no será recta; si son iguales, será un cilindro.

[5] Los testimonios han sido recogidos por R. HEINZE, *Xenokrates...*, págs. 175-178.

neas indivisibles a Jenócrates, contemporáneo de Aristóteles algo mayor que él y sucesor de Espeusipo al frente de la Academia. Insisten en afirmar que la intención de Jenócrates era la de refutar las teorías eleáticas que aceptaban la infinita divisibilidad del continuo, y en indicar que al rechazar la divisibilidad infinita mediante la suposición de las líneas indivisibles, Jenócrates incurría en una contradicción aún mayor, la de hacer que una sola cosa fuera al mismo tiempo magnitud y no magnitud.

EL TRATADO Y SU VALORACIÓN

La obra consta de tres partes de extensión desigual y decreciente. En la primera, la más extensa, se intenta refutar la teoría de la existencia de las líneas indivisibles; en la segunda, notablemente más breve, se intenta probar que la línea no está compuesta de puntos; en la tercera, sólo unas pocas frases, se intenta tirar por tierra dos definiciones de «punto», la que dice que el punto es «lo más pequeño que hay en la recta» y la que lo presenta como una «articulación sin partes».

Todos estos temas están ya anunciados en la *Física* aristotélica: el primero en 206a16-18: «y ya se ha dicho que la magnitud no es actualmente infinita, aunque es infinitamente divisible —no es difícil refutar la hipótesis de las líneas indivisibles» y en 220a30: «toda línea es siempre divisible»; el segundo y el tercero en 215b12-22: «no hay ninguna proporción según la cual el vacío sea superado por un cuerpo, como no hay ninguna proporción entre la nada y el número... por esto tampoco la línea supera al punto, a menos que la línea esté compuesta de puntos».

El contenido preciso del escrito puede ser resumido de la manera siguiente:

Primera parte (968a1-971a5): ¿Existen las líneas indivisibles?
- 968a5-968b22: Exposición de los cinco argumentos de quienes defienden la existencia de las líneas indivisibles.
- 968b22-969b26: Refutación de los argumentos anteriores.
- 969b26-971a2: Exposición de las dos series de argumentos matemáticos que contradicen la existencia de las líneas indivisibles. La primera serie (969b26-970a18) contiene seis argumentos y la segunda (970a18-971a2) añade otros once argumentos más.
- 971a2-971a5: Conclusión: es evidente que no existe una línea indivisible.

Segunda parte (971a6-972a31): La línea no se compone de puntos.
- 971a6-972a12 Contiene diez argumentos; unos son matemáticos, otros lógicos y otros de carácter analógico con hechos físicos.
- 972a12-972a31: Conclusiones.

Tercera parte (972a32-972b33): El punto no es lo más pequeño que hay en la recta ni tampoco una articulación indivisible.
- 972a32-972b24: Cinco argumentos tendentes a probar que el punto no es lo más pequeño que hay en la recta.
- 972b24-972b33: Cinco argumentos en contra de la definición del punto como «articulación indivisible».

Para Heath[6] el autor «se dedica a desmenuzar la lógica más que a contribuir seriamente a la filosofía de las matemáticas» y «el interés de la obra para la historia de las matemáticas es ínfimo». Por el contrario, Hett afirma que «sin el punto de vista moderno sobre el infinito, hay mucha brillantez matemática, y el autor parece probar su tesis en sus

[6] *A History of Greek Mathematics*, vol. I, pág. 347.

propios términos». Esta opinión no ganó, sin embargo, muchos partidarios, hasta que el comentario de Timpanaro-Cardini planteó la cuestión en términos más acordes con el valor de la obra.

Esta autora lamenta que no nos haya llegado otro opúsculo semejante en el que se defendiera la tesis contraria y observa que el título figura entre las obras atribuídas a Teofrasto, deduciendo de ello que «no es improbable que tomase esta cuestión como argumento de lecciones y discusiones escolásticas, lo que demostraría que esta cuestión se contaba entre las más debatidas en el ambiente cultural de la época y estaba relacionada con los mismísimos principios de las doctrinas físico-matemáticas».

La cuestión debatida afecta a las bases teóricas de la geometría. Por ello merece especial consideración, si tomamos en cuenta que la naturaleza y la definición de puntos y líneas son cuestiones fundamentales en el sistema geométrico euclidiano. En efecto, las dos primeras definiciones del libro I de Euclides son precisamente las de «punto» y «línea», temas centrales de este tratado. Dado que todos los autores consultados parecen datar el tratado en fecha previa a la aparición de los *Elementos* de Euclides[7], no parece desatinado considerar que este tratado es testimonio de los múltiples debates que debieron preceder a dicha obra.

Ciertos rasgos de estilo y pensamiento parecen confirmar la idea señalada por Heath de que nos enfrentamos a un texto de carácter escolar, sin introducción ni recapitulación; los argumentos han sido recogidos y presentados ordena-

[7] De ser así debemos incluir este escrito entre los pocos textos de carácter matemático anteriores a Euclides que se nos han conservado y tener presente que sería la única obra completa de esa característica junto con los tratados de AUTÓLICO DE PITANE *Sobre la esfera en movimiento* y *Sobre los ortos y los ocasos*.

damente, pero se introducen de modo abrupto, sin previa introducción, y se enumeran de modo mecánico con la ayuda de la fórmula *éti dè kaì* («y además»); la exposición pretende ser clara y completa y da, en efecto, esa sensación, pero carece de brillantez: un útil trabajo de escuela, aparentemente complementario de las palabras del maestro, pero muy lejos de la agudeza de sus análisis.

EDICIONES Y TRADUCCIONES

La primera edición del tratado fue la de Henricus Stephanus (Henri Étienne, París, 1557), seguida por la de Bekker (Berlín, 1831). Debido al lamentable estado de los manuscritos el texto se presentaba lleno de pasajes incomprensibles; uno de los copistas se desahoga en el margen: «El modelo está demasiado estropeado; y que no me echen la culpa: como lo veo, así lo escribo». En 1874 Hayduck publicó un artículo (cf. bibliografía) en el que pasaba revista al texto: sus acertadas y elogiadas propuestas dieron pie a una nueva edición, que fue preparada por Apelt (Leipzig, 1888). En ella se han basado todos los editores y traductores posteriores hasta la fecha presente. Los esfuerzos por sanar el texto no habían concluido: Joachim, Timpanaro-Cardini, Harlfinger y Federspiel han dedicado importantes trabajos a este intento. Las enmiendas a la edición de Apelt son ya tan numerosas que se hace tarea indispensable elaborar una nueva edición. En cuanto a comentarios, son dignos de mención los de Joachim y Timpanaro-Cardini. El primero es sobre todo un comentario textual y exegético, mientras que el segundo procura situar la obra en el contexto de la historia de las matemáticas y del debate intelectual de los siglos IV y III a. C.

En España será ésta la primera traducción directa del griego. Para prepararla he seguido el texto de Apelt en la versión editada por Hett, si bien he alterado la puntuación procurando hacer coincidir los puntos y aparte con los finales de la exposición de cada argumento.

Para la numeración marginal he seguido, como es tradicional, la de la edición de Bekker; la numeración que figura en el cuerpo del texto en romanos, es obra mía y pretende facilitar la intelección de la secuencia argumental.

PASAJES EN LOS QUE ME APARTO DE LA EDICIÓN DE HETT

	Texto de Hett	Lectura aceptada
968b26-7	εἰ ἐν τοῖς συμμέτροις γραμμαί εἰσιν γραμμαί	εἰ ἐν τῷ συνθέτῳ ⟨ἄτομοι εἰσιν⟩ γραμμαί
969a4	εἶναι	ἔνιαι
972b30	διὸ δεῖ ὀρθῶς	δύω δέει ἄρθρων (coni. Timp.-Cardini)

¿Existen acaso las líneas indivisibles y hay en todas las magnitudes, en general, algo sin partes, como afirman algunos? 968a

I. Pues[1] si se da semejantemente lo «mucho» y lo «grande» y los opuestos de éstos, lo «poco» y lo «pequeño» y, por otra parte, lo que tiene divisiones casi infinitas no es «poco», sino «mucho», es evidente que lo «poco» y lo «pequeño» tendrán divisiones finitas. Y si sus divisiones son finitas, es necesario que exista una magnitud sin partes, de modo que en todas las magnitudes habrá alguna sin partes, puesto que en todas hay lo «poco» y lo «pequeño».

II. Además, si existe la idea de «línea» y la idea es la primera de las de su nombre y las partes son previas al todo por su naturaleza, esta línea[2] sería indivisible, de la misma manera que el cuadrado y el triángulo y las demás figuras y, en general, el propio plano y el cuerpo[3]. Pues ocurrirá que aquéllas son previas a éstas.

III. Además, si existen los elementos de un cuerpo y no hay nada previo a los elementos, y las partes son previas al todo, el fuego sería indivisible y, en general, lo sería cada

[1] Comienza en este punto la presentación de los argumentos de quienes defienden la existencia de las líneas indivisibles.

[2] Se refiere a una línea «ideal» en el sentido platónico del término.

[3] También aquí se refiere a cuadrados, triángulos, planos y cuerpos «ideales», previos, en tanto que ideas, a los existentes en el mundo perceptible.

uno de los elementos del cuerpo, de manera que existe algo sin partes no sólo en los inteligibles sino también en los sensibles.

IV. Además, por otro lado, según el argumento de Zenón, es necesario que exista una magnitud sin partes, si es que es imposible en un tiempo finito tocar un número infinito de cosas tocadas una por una; y es necesario que lo que se mueve llegue primero a la mitad; y de lo que tiene partes sin duda existe la mitad. En ese caso, si lo que es transportado sobre la línea también toca un número infinito de cosas en un tiempo finito y lo más rápido también consigue más en el mismo tiempo y el movimiento del pensamiento es el más rápido, entonces el pensamiento tocaría una por una un número infinito de cosas en un tiempo finito; de esa manera, si tocar las cosas una por una el pensamiento es contar, se admite como posible contar lo infinito en un tiempo finito: y si esto es imposible, existiría una línea indivisible[4].

V. Además, también a partir de lo que afirman los que se ocupan de las matemáticas existiría una línea indivisible, según dicen; si «conmensurables» son las que se miden con la misma medida[5], son conmensurables todas cuantas son

[4] Aristóteles en *Física* 187a3 hace referencia a este argumento, «el argumento de la dicotomía, que supone magnitudes indivisibles». Para comprender adecuadamente y situar en su contexto el párrafo conviene recurrir a ciertos pasajes de la *Física* aristotélica que nos transmiten el pensamiento de Zenón (239b9, 239b11, 233a21, 239b14, 239b30, 239b33), reunidos, traducidos y comentados en G. S. Kirk y J. E. Raven, *Los filósofos presocráticos,* Madrid, Gredos, 1981, págs. 408-15.

[5] Para interpretar correctamente este argumento es necesario tener presente el valor de los conceptos matemáticos que en él se utilizan. La mayor parte de las veces encontramos las aclaraciones que nos son precisas recurriendo a los *Elementos* de Euclides, si bien lo más posible, como señala Heath *(Mathematics in Aristotle,* Oxford, 1949, pág. 256) es que este tratado sea de fecha anterior a Euclides y, por tanto, su autor tomara

medidas, pues existiría una longitud con la que todas son medidas. Y esa longitud por fuerza ha de ser indivisible, pues si fuera divisible también sus partes tendrían una medida, pues son conmensurables con el todo. De manera que su mitad sería el doble de una parte. Pero puesto que esto es imposible, sería una medida indivisible.

Así, se componen de elementos sin partes tanto las líneas medidas una sola vez por esta medida como todas las líneas compuestas de la medida. Lo mismo ocurrirá en el caso de las figuras planas. Todas las compuestas por rectas racionales[6] serán conmensurables entre sí, de manera que la medida de éstas carecerá de partes. Pero si una medida va a ser cortada de acuerdo con una línea fijada y determinada, esa línea no será ni racional ni irracional —ni ninguna de

esas nociones de otros matemáticos. Por ejemplo, términos como «binomial» y «apótoma» pueden haber sido tomados de Teeteto, a quien se atribuye, según una noticia de Papo, el descubrimiento y estudio de las irracionales compuestas. La definición que se da aquí de «líneas conmensurables» coincide con la que ofrece EUCLIDES, *Elementos* X, def. 1.

[6] En cuanto a las rectas racionales e irracionales, hay que recordar que, para la matemática griega, las nociones de racionalidad e irracionalidad son relativas y de carácter geométrico. Así lo señala EUCLIDES en *Elem.* X, def. 3: «...existen rectas, infinitas en número, conmensurables e inconmensurables, unas sólo en longitud, otras también en cuadrado, con una recta propuesta: llámese, pues, «racional» a la recta propuesta y «racionales» a las que son conmensurables con ella ya sea en longitud y en cuadrado, ya sea sólo en cuadrado, y llámese «irracionales» a las inconmensurables con ella». Para explicar la noción de «conmensurabilidad en cuadrado» resulta aclaradora la nota de HETT: «Dos líneas, cuyas longitudes son respectivamente $\sqrt{3}$ y $\sqrt{6}$ son conmensurables en cuadrado porque sus cuadrados, 3 y 6, son conmensurables», aunque hay que tener presente que trasladar el pensamiento geométrico euclidiano a términos numéricos comporta siempre cierta falsedad.

aquéllas de las que se ha venido hablando[7], como la apótoma o la binomial[8]— sino que ni siquiera por sí mismas tendrán características naturales; por el contrario, serán entre sí racionales e irracionales.

I. Ahora bien[9], en primer lugar, no es preciso que lo que admite divisiones infinitas no pueda ser «pequeño» y «poco». Y es que llamamos «pequeño» al espacio, a la magnitud y, en general, a lo continuo —incluso en los casos en los que conviene el calificativo «poco»— y sin embargo decimos que tienen infinitas divisiones.

Además, si hay líneas indivisibles en la longitud 969a compuesta, «pequeño» se dice en relación con ésas indivisibles, y en ellas hay infinitos puntos. En tanto que línea, admite una división por un punto, y de la misma manera por cualquier otro punto. Por tanto, cualquier línea que no fuera in-

[7] Apótomas y binomiales son dos de los tipos de rectas *irracionales* estudiadas por EUCLIDES en el libro X (de ahí que, como han indicado Heath y Timpanaro, debamos rechazar la conjetura textual de Apelt).

[8] La definición de la binomial aparece en EUCLIDES, *Elementos* X 36: «Si se suman dos rectas racionales conmensurables sólo en cuadrado, la recta resultante es irracional: llámesela binomial»; las Segundas Definiciones y las proposiciones 42 y 48-66 se ocupan de la clasificación y características de las binomiales. La definición de la apótoma aparece en X 73: «Si se quita de una recta racional otra racional que sea conmensurable sólo en cuadrado con la recta entera, la restante es irracional: llámesela apótoma»; las proposiciones 74-75 dan la clasificación de las apótomas; las proposiciones 79-81, las Terceras Definiciones y lo que sigue, proposiciones 85-104 y 108-114 describen sus características y propiedades.

[9] Aquí comienza la enumeración de los argumentos con los que el autor pretende refutar a los sostenedores de las líneas indivisibles. La edición de Apelt presenta la conjunción disyuntiva *ḗ*, que probablemente hay que corregir, a tenor del sentido y de lo expresado por DENNISTON, (*The Greek Particles*, Oxford, 1978, rp. de la segunda edición, pág. 279 y ss.) por la partícula *ê*. De hecho, los restantes traductores también han obrado como si lo hubieran corregido.

divisible tendría infinitas divisiones. Algunas de éstas son pequeñas. Y las razones[10] son infinitas y es posible cortar cualquier recta que no sea indivisible según la razón dada.

Además, si lo «grande» se compone de varias cosas pequeñas, o bien «grande» no significará nada o bien «grande» consistirá en tener divisiones finitas; pues de manera semejante lo «entero» tiene las divisiones de sus partes. Pero es irracional que lo «pequeño» tenga divisiones finitas y lo «grande» infinitas: eso opinan.

De modo que es evidente que no se les llamaría «grande» y «pequeño» por la razón de tener divisiones finitas o infinitas. Y si alguien creyera que porque en los números lo «poco» tiene divisiones finitas, también las tendrá[11] en las líneas lo «pequeño», es que es tonto. Pues en aquel caso[12] el origen procede de cosas sin partes y existe algo que es el principio de los números; y todo lo que no es infinito tiene divisiones finitas. Pero en el caso de las magnitudes no es lo mismo.

II. Por otro lado, los que proponen que las líneas indivisibles están en las Ideas toman quizás como axioma de lo precedente el argumento menos valioso, a saber: suponer que existen Ideas de estas cosas; y, en cierto modo, invalidan el razonamiento mediante aquello que demuestran. Y es que por estos razonamientos se invalidan las Ideas.

III. A la vez, es estúpido considerar que lo que no tiene partes se cuenta entre los elementos corpóreos. Aunque algunos demuestren que es así, toman como argumento para la investigación propuesta lo mismo que tomaron como principio. Y sobre todo, que cuanto más parece que usan el

[10] Se refiere a las «razones que surgirían entre las partes de estas líneas divisibles si éstas fueran cortadas».

[11] Tendrá «las divisiones finitas», se sobreentiende.

[12] En el de los números enteros.

principio, tanto más parece que el cuerpo y la longitud son divisibles en volúmenes y en longitudes.

IV. Y el razonamiento de Zenón no prueba que en un tiempo finito lo movido toque infinitas cosas así, en este sentido. Pues «infinito» y «finito» se dicen del tiempo y de la longitud, y tienen las mismas divisiones.

Y a la vez, el que el pensamiento toque una por una las infinitas cosas no es contar, si es que alguien cree que el pensamiento toca así las infinitas cosas, lo cual es tal vez imposible, pues el movimiento del pensamiento no transcu-
969b rre, como el de las cosas movidas, entre sujetos continuos.

Y si, en efecto, cabe que se mueva así, eso no es contar, pues contar va acompañado de pausas. Pero quizá sea irracional que presten sumisión a su debilidad quienes no han tenido fuerza para resolver el razonamiento y se engañen a sí mismos con engaños mayores reforzando su incapacidad.

V. En lo relativo a las líneas conmensurables, lo de que todas son medidas por una cierta y única medida es un argumento completamente sofístico y en completo desacuerdo con las hipótesis matemáticas, que ni plantean esa hipótesis ni les es útil. A la vez, incluso es contradictorio pensar que cualquier recta es conmensurable y que existe una medida común a todas las conmensurables.

De manera que es ridículo, tras decir que se va a demostrar las opiniones de aquéllos[13] y aquello sobre lo que las fundan, inclinar el discurso a lo erístico y a lo sofístico y eso tan débilmente. Pues es débil en muchos sentidos para escapar plenamente a las paradojas y a las refutaciones[14].

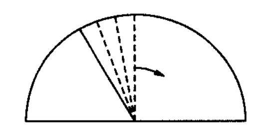
[13] «Las opiniones de los matemáticos», se entiende.

[14] Es decir: «estos argumentos, supuestamente matemáticos, no tienen fuerza bastante como para escapar...».

Además, sería irracional, de un lado, que por causa del argumento de Zenón que establece que algunas lineas son indivisibles nos desviemos del razonamiento correcto por no poder argüir en contra. Y por otro lado es fácil dejarse persuadir por el argumento del movimiento de la recta que genera un semicírculo, que es necesario si es que alcanza los puntos infinitos que hay entre los arcos y los radios; y lo mismo cuando genera un círculo, porque por fuerza ha de moverse de un punto a otro si se mueve por el semicírculo; y por los restantes teoremas que se han estudiado en relación con las líneas, que no es posible admitir que exista un movimiento semejante si no cae primero sobre cada uno de los puntos intermedios[15]. Pues estos argumentos son más aceptados que el primero[16].

[15] Es decir, el movimiento del radio que recorre un semicírculo recorre —dice el tratadista— *todos* los puntos de líneas divisibles, en lugar de —como pretenden sus oponentes— ir saltando del extremo de una indivisible al extremo de la indivisible siguiente.

[16] JOACHIM *(op. cit.,* nota *ad loc.)* interpreta este párrafo de la siguiente manera : «En otras palabras: la geometría, asumiendo que el movimiento es un hecho, muestra que el objeto que se mueve atraviesa *en efecto* la infinidad de puntos intermedios y muestra que no puede haber movimiento en el que esto no se produzca. Quienes defienden las líneas indivisibles no han llevado a cabo intentos de refutar estas pruebas geométricas. Su postulado de 'líneas indivisibles', incluso si esquivan los argumentos de Zenón, entra en colisión con los mucho más sólidos datos de la geometría: porque la geometría muestra que es imposible la clase de movimiento que tendría lugar si existieran las líneas indivisibles. El texto está tan corrupto que parece imposible aclarar el argumento en detalle.» Las enmiendas al texto propuestas por FEDERSPIEL («Notes exégétiques...», págs. 504-7) no producen cambios en el sentido del pasaje.



De manera que a partir de los razonamientos expuestos es evidente que no es necesario que existan rectas indivisibles, ni creíble. Y a partir de los que siguen será aún más evidente. Primero, por lo demostrado y propuesto en los tratados matemáticos, que lo justo es o bien mantenerlo o bien rechazarlo mediante argumentos más convincentes[17].

I. Y es que ni la definición de «línea» ni la de «recta» concordarán con la de «indivisible», puesto que ni está entre nada ni tiene medio[18].

970a II. Además, todas las líneas serán conmensurables, pues todas serán medidas por las indivisibles, tanto las conmensurables en longitud como las conmensurables en cuadrado[19]. Y las indivisibles serán todas conmensurables en longitud, puesto que son iguales; de manera que también serán conmensurables en cuadrado. Y si es así, el cuadrado será siempre racional[20].

III. Además, si la recta aplicada a la mayor produce determinada anchura, el ⟨paralelogramo⟩ igual al cuadrado de la indivisible —tómese como tal una recta de un pie de largo[21]— aplicado al doble de esa recta, producirá una anchura

---

[17] Da comienzo aquí la serie de argumentos matemáticos contra la existencia de las líneas indivisibles.

[18] Referencia a dos definiciones que a nosotros nos han sido transmitidas por Euclides, *Elem.* I, def. 3 («Los límites de una recta son puntos») y Platón, *Parménides* 137e («Recto es aquello cuyo medio queda enfrente de ambos extremos»).

[19] Las cuestiones relativas a la conmensurabilidad de las rectas en longitud y en cuadrado son la materia de la que trata *Elem.* X. Véase nota 6.

[20] Así, la aceptación de la existencia de las líneas indivisibles entraría en conflicto con las teorías matemáticas —ya bien asentadas en esta época— sobre lo conmensurable y lo inconmensurable y lo racional y lo irracional, y más concretamente con la irracionalidad existente entre el lado del cuadrado y su diagonal.

[21] «En las líneas se usa la de un pie como si fuera indivisible», afirma Aristóteles en *Metafísica* 1052b33.

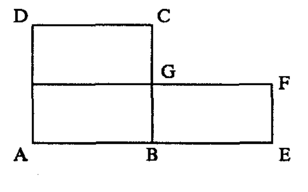
menor que la indivisible; luego esa anchura será menor que la indivisible[22].

IV. Además, si un triángulo se compone de tres rectas dadas[23], también se compondrá de indivisibles. Pero en todo equilátero la perpendicular[24] cae sobre su punto medio, de manera que también sobre el punto medio de la indivisible.

V. Además, si existe el cuadrado de las indivisibles, trazada la diagonal y la perpendicular a ésta, el cuadrado que

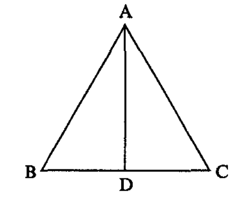
---

[22] De acuerdo con la explicación, ABCD es el cuadrado que tiene por lado la línea indivisible. $AE = 2AB$ y el rectángulo AEFG ha sido construido de tal manera que $AE \times EF = AB^2$. Si eso es posible, afirma el tratadista, $EF = \frac{1}{2}AB$; es decir: se habría dividido por la mitad la línea indivisible, que dejaría de ser tal.



[23] Euclides, en *Elementos* I 22 ofrece la solución al problema de «construir un triángulo con tres rectas que son iguales a tres rectas dadas», pero con la precisión de que «es necesario que dos de las rectas, tomadas juntas de cualquier manera, sean mayores que la restante», teniendo en cuenta que en I 20 se ha demostrado que esto último es propiedad de todo triángulo. La objeción a la existencia de las indivisibles es la misma que en el argumento anterior.

[24] «La perpendicular a cualquiera de sus lados», se entiende. En Euclides, *Elementos* I 10 y 11 se plantean como problemas «dividir en dos partes iguales una recta finita dada» y «trazar una línea rectaperpendicular a una recta dada desde un punto dado en ella». Ambos se resuelven mediante la construcción de un triángulo equilátero, de tal manera que la afirmación que se lee en el texto resultaría corolario de las dos proposiciones mencionadas. Sea ABC el triángulo formado por tres indivisibles y AD la perpendicular al lado BC: la supuesta indivisible BC habría resultado dividida en dos partes iguales por la altura del triángulo, luego no sería indivisible.



tenga un lado tal[25] será igual al cuadrado que tenga por lado la perpendicular más media diagonal, de manera que no es la recta más pequeña posible[26].

VI. Y tampoco el área del cuadrado de la diagonal será el doble del cuadrado de la indivisible. Pues una vez restada la parte igual, la recta restante será menor que la indivisible; y, si fuera igual, la diagonal habría producido un cuadrado que fuera el cuádruple.

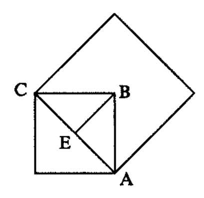
Se podrían reunir otras muchas objeciones semejantes; pues, por así decirlo, se opone[27] a todo lo que hay en las obras matemáticas.

I. A la vez, la indivisible tiene una forma de contacto, mientras que la línea tiene dos, ya que la línea puede estar en contacto ella entera con otra línea entera y por los extremos enfrentados[28].

---

[25] Es decir, que tenga por lado una recta indivisible.

[26] En efecto, en aplicación del teorema de Pitágoras (EUCLIDES, *Elementos* I 47), en el cuadrado de AB (que es una línea indivisible) po-



demos trazar la diagonal AC y una perpendicular a ésta, BE; entonces, $AB^2 = AE^2+EB^2$, de donde resulta que AB no es la menor y, por tanto, tampoco sería indivisible.

[27] Sobreentiéndase «la teoría que sostiene la existencia de las líneas indivisibles». Con esta frase se introduce la segunda serie de argumentos matemáticos contra la existencia de las líneas indivisibles.

[28] Cf. más adelante 971a27 y ss. y nota a ese pasaje.

II. Además, una línea[29] unida a una línea no hará la línea entera mayor, pues las cosas indivisibles unidas no harán una cosa mayor.

III. Además, si a partir de dos indivisibles no surge ningún continuo, ya que todo lo continuo admite múltiples divisiones y toda línea es continua salvo la indivisible, no existiría la línea indivisible.

IV. Además, si toda línea salvo la indivisible se puede dividir en partes iguales y desiguales, aun si hubiera una línea compuesta de tres indivisibles y, en general, de un número impar de indivisibles, la indivisible sería divisible. Y lo mismo si se corta en partes iguales. Pues se puede cortar también cualquiera compuesta de un número impar de indivisibles. Pero si no se puede cortar por la mitad cualquiera, sino la compuesta de un número par de indivisibles, y también si es posible cortar cualquier número de veces la línea cortada por la mitad, también así quedará dividida la indivisible, cuando se divida en partes desiguales la línea compuesta de un número par de indivisibles.

V. A la vez, si lo movido recorre el trayecto completo 970b
en determinado tiempo, recorrerá la mitad en la mitad y en un tiempo menor, menos de la mitad, de manera que si la magnitud está compuesta de un número impar de partes, se repetirá el corte medio de las indivisibles, si es que en la mitad de tiempo va a recorrer la mitad del trayecto; pues el tiempo y la línea quedarán cortados de manera semejante. De manera que ninguna de las líneas compuestas quedará cortada en partes iguales y desiguales. Y si van a ser cortadas de manera semejante a los tiempos, no serán líneas indivisibles. Lo propio de este mismo argumento es, como se

[29] «Una línea indivisible», se entiende.

había dicho, el hacer que todas estas cosas[30] estén compuestas de indivisibles.

VI. Además, toda la que no es infinita tiene dos extremos, pues ellos delimitan la línea[31]. Pero la indivisible no es infinita, así que tendrá extremo: luego es divisible, pues una cosa es el extremo y otra aquello de lo que es extremo. O habrá, aparte de éstas, una línea que no sea ni infinita ni finita.

VII. Además, no habrá un punto en cualquier línea: en la indivisible no lo habrá. Pues si hay sólo uno, la línea será un punto y si hay más la línea será divisible. Por consiguiente, si en la indivisible no hay un punto, tampoco lo habrá, en absoluto, en la línea, pues las demás se componen de las indivisibles.

VIII. Además, o no habrá nada entre medias de los puntos o habrá una línea. Y si entre medias hay una línea, como en todas las líneas hay muchos puntos, la línea no será indivisible.

IX. Además, no existirá el cuadrado de una línea cualquiera, pues tendrá longitud y anchura, de modo que será divisible, ya que lo uno y lo otro son magnitudes. Y si el cuadrado es divisible, también lo será la línea.

X. Además, el extremo de la línea será una línea, pero no un punto, pues lo último es el extremo, pero último es la línea indivisible[32]. Y si el extremo es un punto, el punto se-

[30] Con «estas cosas» se refiere fundamentalmente al espacio y el tiempo, aunque el argumento podía también emplearse para justificar la existencia de indivisibles en otros géneros de magnitudes.

[31] Nueva referencia a las definiciones de EUCLIDES, en este caso a *Elem.* I, def. 3 (v. más arriba, nota 18).

[32] Se abusa de la polisemia de «último» *(éschaton)* al emplearlo en su primera aparición en la frase con sentido local-temporal y como sinónimo de «elemental» en la segunda.

rá el extremo de la línea indivisible, y habrá una línea mayor que otra línea en un punto; pero si el punto está dentro de la línea indivisible, por ser extremo común de las líneas que se continúan, existirá el extremo de lo que no tiene partes. Y entonces, en general, ¿en qué diferirá el punto de la línea? Pues la línea indivisible no tendrá nada propio frente al punto excepto el nombre.

XI. Además, de manera semejante, también el plano y el cuerpo serán indivisibles. Pues siendo uno indivisible, se seguirá también lo restante, por dividirse el uno según el otro. Pero el cuerpo no es indivisible, ya que en él hay pro- 971a
fundidad y anchura; luego tampoco la línea sería indivisible, pues el cuerpo es divisible por planos y el plano por líneas.

Y puesto que los razonamientos mediante los cuales intentan convencer son débiles y falsos, y esas opiniones son contrarias a todos los argumentos vigentes que gozan de crédito, es evidente que no existiría una línea indivisible.

* * *

A partir de esto queda claro que la línea tampoco se compondría de puntos[33], y para ello convendrá la mayoría de los mismos argumentos.

I. Así, el punto quedará necesariamente cortado cuando se corte en partes iguales la recta compuesta de un número impar de partes o en partes desiguales la compuesta de un número par de partes.

II. Y también es necesario que una parte de una recta no sea una recta, ni tampoco una parte del plano, un plano.

---

[33] Tras la conclusión que se da al primer tema en el párrafo anterior, se aborda la segunda cuestión de las que componen el tratado. Los argumentos que se exponen en ella coinciden en parte con los ya expresados y en parte con los que se contienen en *Fís.* 231a20-232a22.

III. Y también sería necesario que exista una línea mayor que una línea en un punto, pues podrá excederla en aquello de lo que está compuesta. (Que eso es imposible queda claro a partir de lo que se contiene en las obras matemáticas; y además ocurrirá que un objeto transportado atravesará el punto en un tiempo, si es que va a recorrer la distancia mayor en un tiempo mayor y la igual en uno igual; y si es que el exceso en el tiempo es tiempo. Pero quizá también el tiempo está formado de los «ahora» y afirmar ambas cosas corresponde al mismo discurso. Si efectivamente el «ahora» fuera el principio y el extremo del tiempo y el punto lo fuera de la línea —y no cabe que el principio y el extremo sean continuos, sino que hay algo entre medias— no existirían ni los «ahora» ni los puntos continuos por sí mismos.)

IV. Además, la línea es una magnitud y la suma de los puntos no forma ninguna magnitud, puesto que no ocupa un espacio mayor. Pues cuando a una línea se le añade y aplica una línea, no resulta una anchura mayor. Y si los puntos están dentro de la línea, los puntos no ocuparían un espacio mayor, de manera que no formarían una magnitud.

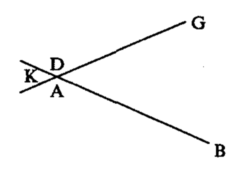
V. Además, si en todo[34] todas las cosas tocan o bien la cosa entera a la cosa entera, o bien una parte toca otra, o

[34] Es decir, «como principio general». Ese principio general aparece en ARISTÓTELES, *Fís.* 231b2: «Y en cuanto al contacto, dos cosas sólo pueden estar en contacto recíproco si el todo de una toca al todo de la otra, o si una parte de una toca a una parte de la otra, o si una parte de una toca el todo de la otra. Pero como los indivisibles no tienen partes, tendrían que tocarse entre sí como un todo con un todo». El pasaje citado forma parte de la argumentación con la que Aristóteles pretende demostrar que «es imposible que algo continuo esté hecho de indivisibles, como, por ejemplo, que una línea esté hecha de puntos, si damos por supuesto que la línea es un continuo y el punto un indivisible».

bien el todo toca una parte y, si el punto carece de partes, el contacto sería completo. Pues sería necesario que la cosa entera tocada por la cosa entera fuera una sola cosa. Pero si una de las cosas es algo que la otra no es, entonces la cosa entera no sería tocada por la cosa entera. Y a la vez, si las cosas sin partes existen, varias cosas ocupan el mismo espacio que ocupaba antes una sola cosa. Puesto que es propio 971b
de las cosas que existen simultáneamente y carecen de amplitud por sí mismas que ambas ocupen el mismo espacio. Y lo que no tiene partes no tiene dimensiones, de manera que no existiría una magnitud continua compuesta de cosas sin partes. Luego tampoco la línea se compone de puntos ni el tiempo de «ahoras».

VI. Y además, si es posible que se componga de puntos, el punto tocará al punto. Por consiguiente, si desde el punto K se trazan las rectas AB y GD, tocarán a K tanto el punto que hay en AK como el que hay en KD, de manera que se tocarán ambos entre sí, ya que lo que no tiene partes entero toca entero a lo que no tiene partes. De manera que ocupará el mismo lugar de K y estarán en contacto mutuo los puntos que ocupan el mismo lugar[35]. Y si están en el mismo lugar,

[35] Como señala JOACHIM (nota *ad loc.)* si B y C están en contacto con K, puesto que el contacto entre los puntos sólo puede ser del tipo «el todo



con el todo», también B y C estarán en contacto entre sí y también en la modalidad «el todo con el todo».

también están en contacto; pues es necesario que las cosas que están las primeras en el mismo lugar se toquen y, si es así, una recta toca a una recta en dos puntos, pues el punto que hay en AK toca al punto que hay en KG y a otro punto, de manera que la recta AK toca a la GD en varios puntos. El mismo razonamiento se aplicaría también si se tratara no de dos rectas, sino de un número cualquiera de ellas que se tocaran entre sí.

Y además, también la circunferencia del círculo tocaría a la tangente en varios puntos[36], pues el punto de contacto tanto el que hay en la circunferencia como el que hay en la tangente se tocarían entre sí. Y si eso no es posible, entonces tampoco es posible que un punto toque a un punto; y si no es posible que se toquen, entonces tampoco es posible que la línea esté hecha de puntos, pues de otra manera sería necesario que se tocaran.

VII. Y además, ¿cómo será entonces lo de la línea recta y curva? En nada diferirá el contacto de los puntos en la recta y en la curva. Pues lo que no tiene partes entero toca entero a lo que no tiene partes, y no cabe que se toquen de otra manera; por consiguiente, si las líneas son distintas y el contacto es indiferente, no habrá una línea que se componga del contacto, de manera que tampoco compuesta de puntos.

VIII. Además, es necesario que los puntos entre sí o bien se toquen o bien no se toquen; y si por fuerza tocan al adyacente, será el mismo razonamiento. Pero si cabe que haya uno adyacente al que no toque, lo que llamamos continuo no es nada distinto de lo compuesto de cosas que se tocan, de manera que también así es menester que los puntos se toquen entre sí o que la línea no sea continua.

---

[36] Por las razones aducidas en el párrafo anterior.

IX. Además, si es absurdo que haya un punto junto a un 972a punto para que exista la línea y junto a un punto para que la línea sea un plano, es imposible que se dé lo dicho[37].

Pues si los puntos están uno a continuación del otro, la línea no quedará cortada en ninguno de los puntos, sino entre medias de ellos. Y si se tocan, la línea será el lugar de un punto: pero eso es imposible.

X. Y además, todas las cosas se dividirían y se podrían analizar en puntos, y el punto sería una parte del cuerpo, si es que el cuerpo está formado de planos y el plano de líneas y las líneas de puntos. Pero si cada cosa está compuesta de

---

[37] Tal es la traducción literal del texto de Apelt que tomo como base. Hett, que emplea el mismo texto, refleja sin embargo en su traducción la versión latina de Julius Martianus Rota. Joachim considera insalvable el corrupto estado del pasaje y prefiere dejarlo en griego sin traducir. M. Timpanaro Cardini sugiere invertir el orden de los dos párrafos que nosotros hemos incluido en IX, pero ni aun así, a nuestro entender, se salva el problema de la relación de este argumento con lo anterior y posterior. Entendemos, más bien, que es Federspiel («Notes exégétiques...», págs. 511-12) quien da la interpretación más acertada al pasaje: de 971a30 a 971b31 el refutador examina tres modos de relación entre los puntos de acuerdo con lo que aparece en Arist. *Fís.* V 3, 226b18 y ss. «El último argumento mostraba que la hipótesis de una relación de consecutividad entre los puntos de una línea o bien nos hacía caer de nuevo en los absurdos de la relación de contacto o bien nos obligaba a cambiar la definición de continuo, lo cual es absurdo. El nuevo argumento prolonga el precedente estudiando una relación aún más general que la de consecutividad, la relación de yuxtaposición. Al revés de lo que se ha venido diciendo, el lazo con el argumento anterior es evidente». Con esta frase Federspiel rechaza la propuesta de M. Timpanaro a la que aludíamos más arriba, y lo justifica de la manera siguiente: la segunda parte del argumento viene a demostrar el aserto contenido en la primera parte, puesto que si esta relación de yuxtaposición tiene consecuencias absurdas, la teoría que afirma que la línea se compone de puntos es falsa. La demostración, igual que en el argumento anterior, se hace en dos tiempos, expresados en las dos frases del segundo párrafo de nuestro argumento IX.

las primeras que hay en ellas, ésos son sus elementos, y los puntos serían elementos de los cuerpos. De manera que los elementos serían sinónimos y no diversos en especie.

Es evidente, a partir de lo dicho, que la línea no se compone de puntos[38]; pero tampoco es posible hacer desaparecer el punto de la línea; pues si cabe hacerlo desaparecer, también es posible añadirlo. Y una vez añadido, aquello a lo que le fue añadido será mayor que lo del principio, si es que lo añadido era de tal clase que formara una unidad entera. Luego habrá una línea mayor que una línea en un punto: pero eso es imposible. Ahora bien, no es posible en cuanto al punto en sí, pero cabe que casualmente de una línea se quite un punto, porque formara parte de la línea quitada. Pues si al quitar algo entero también se quitan su principio y su extremo y el principio y el extremo de una línea era el punto, y si también cabe quitar de una línea una línea, también cabría quitar un punto. Esta es la resta casual. Y si el extremo toca aquello de lo que es extremo, bien a ello mismo bien a alguna de sus partes, y el punto, que es el extremo de una línea, la toca, la línea será mayor que la línea en un punto, y el punto estará formado de puntos, pues no puede haber nada entre las cosas que se tocan.

---

[38] El tratadista da por demostrada su tesis, pero aún ha de abordar otra cuestión en relación con ella: aunque no esté compuesta de puntos, los puntos forman parte de la recta como extremos de la misma, como poco tiempo después recogería Euclides en sus definiciones. Tanto esta segunda cuestión (la línea no está compuesta de puntos) como la tercera (el punto no es lo más pequeño que hay en la recta ni tampoco una articulación indivisible) aparecen ya suscitadas en ARISTÓTELES, *Física* 215b12-22: «Pero no hay ninguna proporción según la cual el vacío sea superado por un cuerpo, como no hay ninguna proporción entre la nada y el número... por esto tampoco la línea supera al punto, a menos que la línea esté compuesta de indivisibles».

El mismo razonamiento se utilizaría en el caso de la sección si la sección lo es de un punto y la sección toca algo, y lo mismo en el caso del sólido y en el del plano: de la misma manera el sólido se compone de planos y el plano de líneas.

* * *

Y no es cierto tampoco decir respecto al punto que es lo más pequeño que hay en la recta[39].

I. Pues si se dice «lo más pequeño de lo que hay», lo más pequeño, en lo que es lo más pequeño, ha de ser también más pequeño que algo, y en la línea no hay ninguna 972b
cosa más que puntos[40] y líneas, y la línea no es mayor que el punto (como tampoco es mayor el plano que la recta), de manera que lo más pequeño que haya en la línea no será el punto.

II. Y si el punto es comparable con la línea y lo más pequeño lo es en tres sentidos, el punto no será lo más pequeño que hay en la línea. Y aparte de los puntos y las líneas hay otras cosas en la longitud, pues no se compone de puntos. Y si lo que está en el espacio o es un punto o una longitud o un plano o un cuerpo o está compuesto de ellos, aquello de lo que se compone la línea está en el espacio (puesto que también lo está la línea) y en la línea no hay ni

[39] En la tercera parte del tratado, que comienza aquí, se tratará la naturaleza del punto de manera negativa, mediante la refutación de dos definiciones que el tratadista considera erróneas: el punto como «lo más pequeño que hay en la recta» y el punto como «articulación indivisible». Más adelante también Euclides formularía su definición de punto en forma negativa (*Elementos* I, def. 1): «Punto es lo que no tiene partes».

[40] Los puntos estarían en la línea como extremos de la misma.

un cuerpo ni un plano ni se compone de ellos, en la longitud no habrá nada en absoluto aparte de los puntos y las líneas.

III. Además, de lo que hay en el espacio lo llamado mayor es una longitud o un plano o un cuerpo; y el punto está en el espacio; y lo que hay en la longitud no es nada de lo mencionado anteriormente salvo los puntos y las líneas, de manera que el punto no será la menor de las cosas que hay en él[41].

IV. Además, si aquello de lo que decimos «es lo más pequeño que hay en la casa» ni se compara con la casa ni, al comparar la casa, se dice en relación a ello, y lo mismo en los demás casos, tampoco lo más pequeño que hay en la línea habrá de compararse con la línea. De manera que no le convendrá el nombre de «lo más pequeño».

V. Además, si lo que no está en la casa tampoco es lo más pequeño de lo que hay en la casa, y de la misma manera en los otros casos (puesto que cabe que el punto exista por sí mismo) tampoco será verdadero decir con relación al punto que es lo más pequeño que hay en la línea.

Además, el punto no es una articulación indivisible.

I. Pues la articulación siempre tiene dos extremos, mientras que el punto es límite de una línea.

II. Además, éste es un extremo, mientras que aquélla[42] es más bien una división.

III. Además, la línea y el plano serán articulaciones, pues tienen cierta analogía.

IV. Además, la articulación existe en cierto modo por causa del movimiento, por lo cual Empédocles escribió lo

[41] «En el espacio».

[42] «La línea».

de «requiere dos articulaciones». Mientras que el punto se cuenta también entre las cosas inmóviles[43].

V. Además, nadie tiene articulaciones infinitas en el cuerpo o en la mano, pero los puntos son infinitos.

VI. Además, no existe la articulación de una piedra, ni la tiene, pero sí tiene puntos[44].

---

[43] Algunos autores consideran que este pasaje, corregido de manera diversa pero con sentidos no lejanos por Diels y Timpanaro, debía formar parte de un texto sobre las articulaciones de los animales.

[44] Aceptar la corrección propuesta por M. Timpanaro para la cita de Empédocles un poco más arriba es lo que nos permite interpretar esta última frase, que de otro modo resulta incomprensible: las articulaciones serían exclusivas de los seres vivos. Tal característica haría imposible definir el punto como ninguna clase de articulación.

ARISTÓTELES

MECÁNICA

INTRODUCCIÓN

MECÁNICA, TECNOLOGÍA Y CIENCIA EN LA ANTIGÜEDAD GRIEGA

El mundo occidental experimenta hoy ante la ciencia griega un sentimiento doble de cercanía y distancia: los griegos son para nosotros precursores, pero los métodos y los fines de la ciencia antigua eran muy distintos de los de nuestros días. La ciencia de la Grecia antigua pretendía responder a la pregunta de *por qué* sucedían los fenómenos, mientras que la ciencia moderna intenta dar cuenta de *cómo* suceden y, en la medida de lo posible, formular matemáticamente esa descripción.

En nuestros días la ciencia se sirve de la interacción de los métodos inductivo y deductivo, apoyándose firmemente en la experimentación, mientras que la Antigüedad concedía mayor importancia al método deductivo y recurría raramente al experimento —nunca a la experimentación sistemática—, cuyo papel a efectos inductivos era desempeñado por la observación. El escaso desarrollo alcanzado entonces por el método experimental se debió en parte a la carencia de instrumentos de medida, lo que a su vez era consecuencia de la escasa interacción entre ciencia y tecnología.

Otra gran diferencia reside en la función social de la ciencia, que hoy avanza movida simultáneamente por la curiosidad de los científicos y por las exigencias tecnológicas y, a la vez, recibe de la tecnología importantes apoyos para avanzar en la investigación que deberá producir nuevos avances científicos. En el mundo antiguo, por el contrario, los trabajos de resultados prácticos fueron siempre considerados serviles y vistos con cierto menosprecio; ese rechazo de las aplicaciones prácticas de la ciencia tuvo como consecuencias el desperdicio de ingentes cantidades de talento, un empobrecimiento metodológico e instrumental y el asentamiento de un prejuicio social de larga pervivencia que ha seguido vivo hasta la era del maquinismo. Tener presentes estos hechos nos ayudará a comprender mejor la función de la *Mecánica* aristotélica.

En el origen del adjetivo *mēchanikós,* del que procede nuestro término «Mecánica», se encuentra el sustantivo *mēchanḗ,* que significaba primitivamente «recurso, traza, añagaza, astucia». Con ese valor aparece en los textos homéricos y sólo en el período helenístico encontramos acepciones más próximas al sentido que hoy le damos de «parte de la física que trata del equilibrio y del movimiento de los cuerpos sometidos a cualesquiera fuerzas».

Heródoto, el padre de la Historia, fue el primero en utilizar la palabra *mēchanḗ* en el sentido de «máquina», en un pasaje en el que describe el sistema de construcción de la pirámide de Quéops *(Hist.* II 125); algo después lo emplea otro historiador, Tucídides, para referirse a ciertas máquinas de guerra —un ariete y un artilugio para provocar incendios— (II 76 y IV 100), y Platón se refiere con ese término a un mecanismo empleado en escenografía teatral *(Cratilo* 425d, *Clitofonte* 427a). En todos estos textos se puede observar que el significado sigue siendo muy próximo al primitivo «recurso, astucia».

El nacimiento de la mecánica teórica se atribuye a veces al pitagórico Arquitas de Tarento, contemporáneo de Platón, pero si nos atenemos a los textos conservados, el primer físico teórico fue Aristóteles, cuyas teorías, expresadas en la *Física,* desarrollarían el interés por la observación de la naturaleza y los estudios sobre el movimiento. El objeto de su investigación es la naturaleza *(phýsis),* y su pretensión es conocer la materia y la forma de las cosas, así como sus causas. Aristóteles reconoce la existencia de cuatro elementos básicos —aire, agua, fuego y tierra—, debate la existencia del infinito, estudia el lugar, el vacío, el tiempo, el cambio y sus clases. Considera que una de las clases de cambio es el movimiento y establece su teoría clásica sobre él: es necesaria la existencia de un movimiento eterno, producido por un primer motor inmóvil; este movimiento eterno debe ser uno, continuo y de traslación; como no puede ser un movimiento rectilíneo, porque la recta, finita, no podría contenerlo, ese movimiento debe ser circular.

En todo caso, el enfoque dado por Aristóteles y su escuela a estos estudios estaba en la línea de los primeros filósofos jonios y de la filosofía propiamente dicha, y su objetivo era averiguar las causas de los fenómenos y elaborar hipótesis de valor general. No pretendían descubrir *mēchanaí* —«máquinas», «recursos»— que facilitaran la vida cotidiana o la resolución de problemas concretos, sino explicar el mundo.

El período helenístico fue testigo de un gran desarrollo de los aspectos prácticos de la mecánica. Se produjeron grandes invenciones en el terreno de la poliorcética, lo mismo en lo concerniente a construcción de máquinas de asedio y defensa que en el perfeccionamiento de las tareas de fortificación. Esta clase de trabajos se desarrollaron favorecidos sobre todo por los grandes señores helenísticos, que estaban

interesados en los resultados por sus efectos en las técnicas de guerra. A la misma época pertenecen los primeros estudios de mecánica científica, como la *Mecánica* que nos ocupa, y el descubrimiento de la neumática.

Fue en este período cuando tuvieron lugar los descubrimientos de Ctesibio (fl. 270 a. C.) y su discípulo Filón de Bizancio (fines del III a. C). El primero sentó las bases de la neumática, parte de la mecánica que se aplicó a la construcción de relojes de agua y a la construcción de autómatas, artefactos sumamente curiosos sin más función que la de entretener, de los que nunca se pretendió obtener rendimiento económico alguno[1].

Mucha más trascendencia tuvieron los trabajos de Arquímedes (287-212 a. C.), notable inventor y fundador de la mecánica científica. Como práctico de la mecánica, inventó los espejos ustorios, construyó un planetario y un órgano hidráulico y creó gran número de ingenios bélicos. Fueron esas invenciones las que granjearon a Arquímedes su popularidad, pero él siempre las consideró un pasatiempo, y sus escritos están dedicados sólo a los trabajos que fue capaz de desarrollar matemáticamente. Escribió dos libros *Sobre el equilibrio de los planos,* en los que sienta los fundamentos de la Estática, y otros dos *Sobre los cuerpos flotantes* en los

[1] Se trataba de objetos sumamente llamativos pero basados en principios elementales. Entre ellos se mencionan animales que bebían, grifos maravillosos de los que manaba a veces vino, a veces agua, a veces una mezcla de ambos, pájaros que cantaban y movían las alas, órganos de agua. Donde mayores servicios prestaron estos autómatas fue en la corte bizantina. Según las fuentes, en un salón destinado a la celebración de grandes ceremonias se encontraban las figuras de un buey que bebía y un trono, flanqueado por leones que rugían, que subía y bajaba sin que fuera posible ver el mecanismo, el llamado «trono de Salomón». Embajadores y visitantes debían de quedar muy impresionados por semejante espectáculo.

que crea la ciencia de la Hidrostática; le debemos también el principio que lleva su nombre y la definición de la noción de peso específico.

Al hablar de mecánica no podemos dejar de mencionar a Vitrubio (siglo I a. C) y Herón (siglo I d. C), pero sus objetivos y métodos, volcados a la práctica más que a la teoría, pertenecen más a la tradición de la Tecnología que a la de la Ciencia.

Sobre la posición que ocupaba la Mecánica entre los conocimientos antiguos nos han llegado dos noticias procedentes de Proclo y Herón[2]. Ambas coinciden en considerar la mecánica una parte de la matemática que se ocupa de lo sensible y material y en incluir en ella tareas de carácter práctico. Entre los contenidos propiamente científicos de la mecánica, Proclo incluye el estudio de los equilibrios en general, de los centros de gravedad y todo lo relativo al movimiento de la materia. Como ocupaciones más prácticas menciona la construcción de instrumentos bélicos, de artilugios accionados mediante mecanismos neumáticos, mediante contrapesos o mediante cuerdas y cuerdecitas y la construcción de esferas a imitación de las celestes.

La imagen que nos transmiten es la de que en la antigua Grecia se contemplaban los estudios teóricos correspondientes a estas materias y la práctica de las mismas como una única ocupación y que las tareas del científico, el ingeniero y el inventor no estaban claramente delimitadas. El texto de Herón nos hace ver que, en cualquier caso, quienes se ocupaban de la mecánica no eran trabajadores manuales, puesto que «ni la llamada táctica, ni la arquitectura, ni la música

[2] PROCLO, *In primum Euclidis Elementorum librum Commentarii,* ed. FRIEDLEIN, Leipzig, 1873, pág. 41; HERÓN, *Definitiones,* ed. HEIBERG, Leipzig, 1912, pág. 164.

popular o las apariciones de las estrellas, ni la llamada homónimamente mecánica son partes de la matemática».

LA *MECÁNICA*

A la luz de esta evolución, la *Mecánica* —que también recibe los títulos de *Quaestiones Mechanicae, Mechanica Problemata, Mechanica*— es un testimonio del interés del Liceo por los temas relacionados con la Física. Su contenido implica un planteamiento que parece emparentado con la línea de trabajo helenística antes que con las inquietudes de la Academia. En la actualidad ningún autor aboga por admitir la autoría aristotélica, sino que se coincide en suponer que la obra es posterior en una o dos generaciones al propio Aristóteles. La literatura científica antigua no menciona una *Mecánica* aristotélica, lo que hace pensar que en la Antigüedad aún no circulaba con esa atribución.

La terminología matemática de la *Mecánica* se encuentra más próxima que la aristotélica a la de Euclides, pero comparte aún ciertos usos con Aristóteles. De ello deduce Heath[3] que la obra debió de escribirse antes de que la terminología euclidiana se impusiera o que, en el caso de que fuera compuesta después de que Euclides diera a la luz sus *Elementos,* debió de ser redactada por una persona suficientemente próxima a Aristóteles como para seguir influenciado por su expresión. De admitir la hipótesis de que la obra fue redactada, si no por Estratón —como sugería Delambre—, al menos en época próxima a él, podríamos

---

[3] *A History of Greek Mathematics,* vol. I, pág. 344.

interpretar, con Claggett[4], que este tratado es una importante evidencia de la investigación física en el periodo de transición entre los trabajos aristotélicos y los del Museo de Alejandría.

Independientemente de las cuestiones de autoría y datación, varios rasgos saltan a la vista: el autor conocía la *Física* y, en general, los escritos aristotélicos, como lo prueba el hecho de que muchas de las ideas de la *Mecánica* aparezcan también en las obras auténticas de Aristóteles; seguía la tradición de la ciencia antigua de intentar explicar el porqué de las cosas y se dejaba influenciar por un cierto misticismo que parece más propio de los pitagóricos que del Liceo.

Desde el punto de vista de la forma, en el tratado encontramos una primera parte de carácter introductorio, en la cual, en línea con las investigaciones sobre la *phýsis,* avanza que procurará explicar la causa de los fenómenos en los que pequeñas fuerzas consiguen mover grandes pesos. En esta especie de prólogo es donde encontramos la definición más antigua de máquina (847a18-19): «Cuando es preciso llevar a cabo algo contra naturaleza, por su dificultad nos deja sin medios y requiere una técnica. Por eso precisamente llamamos 'máquina' a la parte de la técnica que nos ayuda en esa falta de medios».

Las máquinas nos ayudan multiplicando la fuerza y obtienen esa capacidad de la excelencia del movimiento circular: «El principio de la causa de todos los fenómenos de este tipo está en el círculo» (847 b 16)... «lo que pasa con la balanza tiene que ver con el círculo, lo de la palanca con la balanza, y casi todos los demás fenómenos sobre movimientos mecánicos, con la palanca. Además, puesto que sien-

---

[4] CLAGGETT, M., *Greek sciences in Antiquity,* Londres, 1979[6], págs. 93-94.

do uno el radio, ninguno de los puntos que hay en él se mueve a la misma velocidad que otro, sino que siempre va más deprisa el más lejano del extremo fijo, se producen muchas cosas admirables en relación con los movimientos del círculo» (848a12 y ss.).

Dentro de la primera parte aclara también en qué consisten las cuestiones mecánicas, dándonos con ello la definición más antigua de esta ciencia: «De ese tipo son las cosas en las que lo menor domina a lo mayor y las que con poco peso mueven grandes cargas y casi todos los problemas que denominamos mecánicos» (847a21). Al clasificar este tipo de conocimiento, lo incluye dentro de las matemáticas y de las especulaciones filosóficas sobre la naturaleza: «y estas cosas ni son exactamente las mismas ni están excesivamente alejadas de los asuntos de la naturaleza, sino que son comunes a las especulaciones matemáticas y a las de la naturaleza. Pues el «cómo» se hace evidente mediante la matemática, el «sobre qué» mediante el estudio de la naturaleza».

En la segunda parte el tratado está compuesto por una serie de preguntas y respuestas, forma literaria a la que se da el nombre de *erotapócrisis,* cuyo origen debemos situar en esta misma época y que más tarde se extendería ampliamente en el campo de la literatura didáctica[5]. Aquí entra ya en el auténtico objeto de la obra, que no es otro sino el de explicar las causas del funcionamiento —o de las peculiaridades de funcionamiento— de una serie de instrumentos. Son treinta y cinco cuestiones planteadas en general como preguntas «¿Por qué...?» *(Día tí...?)* acompañadas de respuestas que adoptan la forma de interrogaciones retóricas

[5] Sigue viva hoy día en los catecismos y colecciones de problemas resueltos.

«¿No será porque...?» *(Ê hóti...?/ Ê dióti...?);* las respuestas van seguidas de explicaciones más detalladas en las que, con escasas excepciones, se relaciona el fenómeno «mecánico» descrito con el movimiento circular. En algunas ocasiones, el autor reconoce francamente sus dudas y sugiere dos posibilidades de explicación (cuestiones 12, 34, 35); una sola vez declara abiertamente su ignorancia (32). En cualquier caso, el autor rara vez procede a mediciones o cuantificaciones y sólo de manera puntual aporta respuestas formuladas matemáticamente.

Aunque sus explicaciones no siempre son acertadas, se ocupa de aspectos del funcionamiento de la balanza y la romana (cuestiones 1, 2, 10, 20); la palanca (3); el remo, el timón y la vela (4 a 7); tornos y cabrestantes (13); la cuña (17); la polea (9, 18); tenazas y cascanueces (21, 22); el cigoñal (28).

El autor alcanza una formulación matemática para el funcionamiento de la palanca (cuestión 3, 850a39): «son tres cosas las que hay en relación con la palanca: el punto de apoyo como soporte y centro, y los dos pesos, el motor y el movido; entonces están en proporción inversa el peso movido respecto al que mueve y la longitud respecto a la longitud. Y siempre, cuanto mayor sea la distancia al punto de apoyo, más fácilmente se moverá».

También plantea de modo matemáticamente acertado el llamado «paralelogramo de las velocidades». Este problema figura en las cuestiones 1 (848b10): «Cuando [un punto, un cuerpo] es transportado en determinada proporción, por fuerza lo transportado ha de ser transportado en línea recta, y esa recta es diagonal de la figura que producen las líneas compuestas en esa proporción» y 23 (854b16 y ss.) en donde se refiere a un caso especial del anterior, el de un romboide con lados de longitud muy desigual.

Puntualmente aparecen cuestiones de alcance más general, aunque el tratadista no es consciente de su auténtica importancia: la fricción (8), la proporción entre los tamaños de las ruedas y el movimiento que producen (9, 11, 12, 13), el rozamiento (15), fuerza, movimiento e inercia —aunque ni conoce esos conceptos ni les da nombre— (19, 31, 32, 33, 34).

Otras veces las preguntas resultan sorprendentes; así, en 25, una cuestión banal y carente de relación con la mecánica «¿Por qué hacen los lechos con un lado doble que el otro, un lado de seis pies y un poco más y el otro de tres? ¿Y por qué no tensan las cuerdas según las diagonales?» es respondida en términos geométricos mediante comparación de ángulos y polígonos. También sorprende, en este caso por su atrevimiento, la cuestión 35: «¿Por qué los objetos movidos en aguas con remolinos son llevados al final todos al centro?».

VALORACIONES DE LA OBRA

Son evidentes las diferencias que separan las reflexiones físicas de la Antigüedad de las de nuestro tiempo tanto en planteamiento como en objetivo y método. Eso explica, al menos en parte, que las valoraciones emitidas por los estudiosos más próximos a nosotros hayan pecado de simplistas en alguna ocasión. Algo de eso ocurre con Heiberg que se refiere a esta obra como «una variada colección de problemas de interés sumamente desigual»[6].

[6] *Geschichte...*, pág. 67.

Para Taton, el autor sabe plantear hábilmente problemas muy precisos y consigue asentar principios fundamentales, como el de la palanca o el paralelogramo de velocidades. Por contra —sigue el juicio de este autor— las soluciones que aporta no siempre son afortunadas y el autor mezcla demasiado frecuentemente consideraciones metafísicas con sus razonamientos.

Heath ha sido uno de los mejores comentaristas del tratado en los últimos tiempos; sus comentarios, amplios, reflexivos y bien documentados han pasado más de una vez a las notas que hemos añadido a nuestra traducción, y allí encontrará el lector las referencias correspondientes. Las opiniones expresadas por Heath han influido notablemente en los escritos posteriores sobre la *Mecánica,* y no es raro encontrar reflejos de sus comentarios en las explicaciones de otros autores.

En la Antigüedad la obra debió de ser objeto de lectura y estudio, como lo demuestran ciertos pasajes de Vitrubio y Herón. El texto, olvidado en la Edad Media tanto en el mundo árabe como en el latino, fue recuperado por el Renacimiento, período en el que despertó un interés singularísimo, para caer de nuevo en el olvido tras la aparición de la mecánica de Galileo. Esta es la tesis que han demostrado Drake y Rose[7], quienes han recogido y comentado datos que ponen de relieve la gran influencia ejercida por la *Mecánica* a lo largo del siglo XVI.

A lo largo de ese siglo aparecieron media docena de traducciones a distintas lenguas (latín, italiano, alemán, español); fue objeto de cursos en París en 1565 y en Padua en 1570, 1581 y 1598 (este último a cargo de Galileo, quien,

---

[7] En su artículo «The Pseudo-Aristotelian Questions of Mechanics in Renaissance Culture», *Studies in the Renaissance* 18 (1971), 65-104.

además, escribió un comentario, hoy perdido, sobre este texto); aparece repetidamente citada y comentada por los tratadistas de teoría de máquinas y resultó ser a los ojos de los pensadores renacentistas un texto sugerente que inspiró parte de las discusiones contenidas en los tratados y diálogos sobre filosofía natural. A principios de siglo fueron sobre todo humanistas y filósofos quienes se interesaron por el texto, mientras que al final del mismo, como consecuencia natural de la multiplicación de traducciones y comentarios, las cuestiones planteadas en la *Mecánica* fueron atrayendo más bien a ingenieros y matemáticos, que discutieron esos mismos problemas bajo formas matemáticas más sofisticadas.

Continuando esa línea de investigación, F. De Gandt, en un artículo no menos ameno que interesante, ha recogido y comentado textos procedentes de las obras de Tartaglia, Benedetti, Guido Ubaldo y Galileo que ilustran los intereses específicos de estos hombres de ciencia en relación con la obra pseudo-aristotélica. Además del comentario perdido al que hacíamos referencia más arriba, Galileo la menciona repetidamente en sus *Discursos* y manifiesta que le sirvió de inspiración: en ella encontró la idea de la compensación de la fuerza por la velocidad, lo que le sugirió la noción de «momento» que le serviría para unificar los efectos mecánicos, los movimientos de fluidos, la caida de los cuerpos y la resistencia de materiales. La superación de los postulados aristotélicos tuvo como consecuencia el desinterés por este tratado.

EDICIONES Y TRADUCCIONES

El texto griego de la *Mecánica,* fue editado por primera vez por Aldo Manuzio (Venecia, 1497) entre las obras de

Aristóteles. En el siglo XVI fue de nuevo editado junto con una versión latina por Monantheuil (o Monontolio, París, 1599); otras traducciones latinas fueron la de Fausto (1517) y la de Tomeo (1525). Las primeras versiones en lenguas modernas fueron la italiana de Guarino (1573) y una versión española que permaneció inédita y a la que nos referiremos más adelante. En el siglo XVII apareció la traducción alemana de Moegling (1629). Los filólogos alemanes del siglo XIX produjeron tres nuevas ediciones, todas ellas enriquecedoras para la comprensión cabal del texto —no siempre fácil— de la *Mecánica*. Fueron los trabajos de Cappelle (Amsterdam, 1812), Bekker (Berlín, 1831) y Apelt (Leipzig, 1888). Hett, en la edición bilingüe de la colección Loeb reproduce el texto de Apelt, que es el que hemos seguido. La edición más reciente ha sido la preparada por M. E. Bottecchia (Padua, 1982)[8].

En cuanto a traducciones, son de calidad las inglesas de Hett (Loeb) y Forster (en la traducción al inglés dirigida por Ross). No existe de momento traducción al francés de esta obra.

En español, la primera traducción fue la realizada por Diego Hurtado de Mendoza[9]. Embajador de Carlos V en Venecia, en las sesiones preparatorias del Concilio de Trento, en Roma ante la Santa Sede y en Siena, aprovechó su estancia en Venecia para hacerse con una excelente colección de

---

[8] Se trata, según un comentario de J. BERTIER, de «un trabajo muy elaborado en lo relativo a la crítica textual y en la presentación de numerosos escolios inéditos». Lamentablemente no me ha sido posible conseguir esta obra para utilizarla como base de mi trabajo.

[9] A. GONZÁLEZ PALENCIA y E. MELE publicaron su biografía junto con la colección de fuentes en las que se basa y diversos índices en una obra de lectura amenísima, *Vida y obras de Don Diego Hurtado de Mendoza*, 3 vols., Madrid, 1941-43.

manuscritos latinos y griegos, y durante las sesiones preparatorias del Consejo de Trento (invierno de 1544-45) se dedicó a llevar a cabo la traducción de este tratado. El trabajo quedó inédito en la biblioteca del traductor, que éste legó a Felipe II y que pasó a constituir la base principal del fondo griego escurialense. Allí se conservan dos copias completas —una de ellas con anotaciones de la mano del propio Mendoza— y una parcial de este texto, que no ha sido impreso sino en 1898[10].

Según afirmación del propio Mendoza, llevó a cabo su traducción basándose en el texto griego *(porque vea quan propria y holgadamente se puede traduzir del griego en nuestra lengua sin passar por la latina),* probablemente sobre la edición aldina *(mi principal proposito a sido ocupar el tiempo que me sobraua de negoçios, en ver y reconoçer las obras de Aristotiles..., y llegando a las preguntas mechanicas que estan a la fin del libro...)* y con la finalidad de que *se conozca la utilidad que sale de las sciencias mathematicas, puestas en obra para estas cosas que cada dia nos van entre las manos*. La traducción de Mendoza merece sin duda mayor atención que la que ahora le dedicamos, y es de esperar que pronto la obtenga.

---

[10] Gracias al trabajo del hispanista R. FOULCHÉ-DELBOSC aparecido en *Revue Hispanique* 5 (1898), 365-405.

De lo que ocurre de acuerdo con la naturaleza, produce 847a
admiración todo aquello cuya causa se desconoce y de lo que ocurre contra naturaleza, todo aquello que sucede mediante una técnica para conveniencia de los hombres, pues en muchos asuntos la naturaleza actúa contra nuestro provecho.

La naturaleza actúa siempre del mismo modo y sencillamente, pero lo provechoso se transforma de muchas maneras. Entonces, cuando es preciso llevar a cabo algo contra naturaleza, por su dificultad nos deja sin medios y requiere una técnica. Por eso precisamente llamamos «mecanismo» a la parte de la técnica que nos ayuda en esa falta de medios. Es exactamente como dijo el poeta Antifonte:

Mediante la técnica dominamos aquello en lo que somos
[vencidos por la naturaleza[1]

De ese tipo son las cosas en las que lo menor domina a lo mayor y las que con poco peso mueven grandes cargas y casi todos los problemas que denominamos mecánicos. Y estas cosas ni son exactamente las mismas ni están excesivamente alejadas de los asuntos físicos, sino que son comunes a las especulaciones matemáticas y a las físicas. Pues el

[1] La cita está en verso —aunque no es un verso completo— de base trocaica; no disponemos de datos bastantes para identificar al poeta citado.

«cómo» se hace evidente mediante la matemática, el «sobre qué» mediante la física.

847b Se contienen entre los problemas de este género los relativos a la palanca. Pues parece ser cosa extraña que una gran carga sea movida por una fuerza pequeña, y eso incluso con una carga bastante grande. Y esa misma carga que uno no puede mover sin la palanca, la mueve más deprisa si le añade además el peso de la palanca.

El principio de la causa de todos los fenómenos de este tipo está en el círculo. Y es razonable que esto ocurra así, pues no es nada raro que ocurra algo admirable a partir de algo más admirable, y lo más admirable es que los opuestos se den unidos, y el círculo se compone de tales opuestos. Pues nace, sencillamente, de lo que se mueve y lo que permanece[2], cuyas naturalezas son opuestas entre sí. Así que, para quienes se fijan en ello, son menos de admirar los contrarios que concurren en éste.

Pues, en primer lugar, en la línea que contiene al círculo, que no tiene ninguna anchura, se muestran en cierto modo los contrarios, lo cóncavo y lo convexo. Y éstos difieren entre sí de la misma manera que lo grande y lo pequeño, pues el intermedio entre éstos es lo igual y entre aquéllos lo recto. Por ello, al transformarse unos en otros es preciso que
848a los primeros se hagan iguales antes de alcanzar cualquiera de los dos extremos y que la línea cuando pase de convexa a cóncava se haga recta; o viceversa, que de ésta se vuelva convexa y redondeada.

Esto es una de las cosas extrañas que ocurren en relación con el círculo; y lo segundo es que se mueve al mismo tiempo con movimientos contrarios, pues se mueve al mis-

[2] Lo que se mueve es la circunferencia, y lo que permanece, su centro.

mo tiempo hacia delante y hacia atrás[3]. Así es la línea que describe el círculo: su extremo va de nuevo al mismo lugar en el que comienza, pues al moverse continuamente lo último pasa a ser lo primero, de manera que es evidente que cambia a partir de ahí.

Por lo cual, como se ha dicho antes, no hay nada de raro en que éste[4] sea el principio de todas las maravillas. Lo que pasa con la balanza tiene que ver con el círculo; lo de la palanca, con la balanza, y casi todos los demás fenómenos sobre movimientos mecánicos, con la palanca. Además, puesto que, siendo uno el radio, ninguno de los puntos que hay en él se mueve a la misma velocidad que otro, sino que siempre va más deprisa el más lejano del extremo fijo, se producen muchas cosas admirables en relación con los movimientos del círculo. Sobre ello expondremos las evidencias en los problemas que siguen.

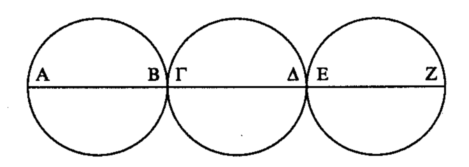
Por otra parte, puesto que el círculo se mueve simultáneamente con movimientos contrarios y puesto que uno de los extremos del diámetro, el punto A[5], se mueve hacia delante, mientras que el otro, el punto B, hacia atrás, hay quienes lo disponen de tal manera que con un movimiento se muevan simultáneamente en direcciones contrarias muchos

[3] En el sentido de que, al estar el círculo en movimiento, mientras uno de los extremos de un diámetro se mueve de atrás hacia delante, el extremo contrario de ese mismo diámetro se está moviendo en sentido inverso.

[4] «El círculo», se entiende.

[5] Los usos terminológicos y descriptivos en Aristóteles no son siempre iguales a los que más tarde se generalizarán, como podemos ver al compararlo con Autólico o Euclides. En estos últimos autores, para designar un punto se utilizan expresiones como *tò sēmeîon tò E* o simplemente *tò E* («el punto E», «E»); en la *Mecánica*, sin embargo, encontramos oraciones de relativo del tipo *eph'hoû tò A*, literalmente «donde está la (letra) A».

círculos, como las ruedecitas de bronce y hierro que fabrican y que luego dedican en los templos[6]. Pues si en contacto con el círculo AB hubiera otro círculo de diámetro ΓΔ, al moverse hacia delante el diámetro del círculo AB, se moverá ΓΔ hacia atrás del círculo AB, al moverse el diámetro en torno al mismo punto. Entonces el círculo de diámetro ΓΔ se



moverá en sentido contrario que el de diámetro AB y, a la vez, él mismo moverá en dirección contraria a la suya propia al siguiente, el de diámetro EZ por la misma causa. De la misma manera, aunque sean más, harán lo mismo con que se mueva uno solo. Los artesanos, tomando esta propiedad que reside en la naturaleza del círculo, fabrican el instrumento ocultando su principio, para que quede a la vista sólo lo admirable del mecanismo mientras que la causa queda invisible.

848b **1** En primer lugar, nos deja sin respuesta lo que ocurre con la balanza, por qué causa son más exactas las balanzas grandes que las pequeñas.

El principio de esto reside en la cuestión de por qué en el círculo la parte del radio más distante del centro es transportada más deprisa que la cercana, la menor, movida con la misma fuerza. (La expresión «más deprisa» se dice en dos sentidos: decimos que es «más deprisa» que atraviese el

[6] También Herón menciona este artilugio, al que da el nombre de *hagnistḗrion.*

mismo espacio en un tiempo menor y en el mismo tiempo un espacio mayor. El radio mayor describe en el mismo tiempo un círculo mayor, pues el círculo exterior es mayor que el interior). La causa de esto reside en que el radio es transportado doblemente[7]. Y cuando es transportado en determinada proporción[8], por fuerza lo transportado ha de ser transportado en línea recta, y esta recta es diagonal de la figura que producen las líneas compuestas en esta proporción[9].

Sea pues la proporción en que se transporta el objeto transportado la que guarda AB con AΓ. Y sea transportada

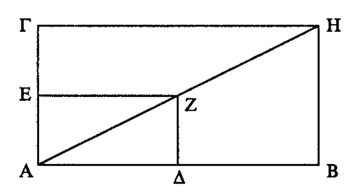
---

[7] El «radio» suele ser designado con expresiones que comprenden el verbo *gráphō* «describir, dibujar»; así, en este mismo pasaje (848b10) *hē gráphousa tòn kýklon*, pero también *tôn ek toû kéntrou graphousôn toùs kýklous* (849a11 y 849a21), *pásēi kýklon graphoúsēi* (849a14-15), *hē AB gráphousa tòn kýklon* (849a27). En otras ocasiones, sin embargo, encontramos expresiones más próximas a la euclidiana *hē ek toû kéntrou*, como en 849a2 *autèn apò toû kéntrou*. La afirmación de que «el radio es transportado doblemente» vendrá justificada un poco más adelante, como corolario a la demostración del «paralelogramo de las velocidades».

[8] Entiéndase «en determinada proporción del doble movimiento mencionado en la frase anterior».

[9] La cuestión que sigue es, dentro de este tratado, una de las que más ha llamado la atención de los historiadores de la ciencia. Se trata del «paralelogramo de las velocidades», antecedente del «paralelogramo de las fuerzas», que da nombre a la regla básica de la mecánica según la cual «la resultante de dos fuerzas concurrentes viene representada por la diagonal del paralelogramo construido sobre ellas». HEATH comenta esta cuestión en su *History of Greek Mathematics,* vol. I, pág. 345: «El paralelogramo de las fuerzas se deduce fácilmente del paralelogramo de las velocidades en combinación con el axioma aristotélico de que la fuerza que mueve un peso dado es llevada en la dirección de la línea del movimiento del peso y es proporcional a la distancia recorrida por el peso en un tiempo dado».

AΓ hacia B y AB sea transportada hacia HΓ. Sea llevado A hacia Δ y AB hacia E[10].



Por consiguiente, si en el transcurso del movimiento la razón era la que AB guarda con AΓ, por fuerza también AΔ guardará la misma razón con AE. Luego el cuadrilátero pequeño es semejante proporcionalmente al mayor, de manera que su diagonal será la misma, y A estará en Z. De la misma manera se demostrará en cualquier punto que el movimiento se interrumpa, pues siempre estará sobre la diagonal.

Por tanto, es evidente que el objeto transportado a lo largo de la diagonal con dos movimientos por fuerza guardará la proporción de los lados; pues si fuera alguna otra[11], no estará siendo transportado por la diagonal. Y si fuera transportado en dos movimientos en ninguna proporción[12] en ningún tiempo, es imposible que el movimiento sea recto.

Así pues, sea recto. Una vez puesta esta diagonal y completados los lados, es fuerza que el objeto transportado sea transportado según la razón de los lados, pues eso ya se ha demostrado antes. Y no hará una línea recta el objeto transportado en ninguna razón en ningún tiempo. Pues si

[10] La descripción de los movimientos nos parecería más fácilmente inteligible si se nos dijera que se transportan «AΓ hacia BH» y «AB hacia ΓH». La traducción, como es natural, debe reflejar el original griego aun cuando éste no se exprese de un modo sencillo.

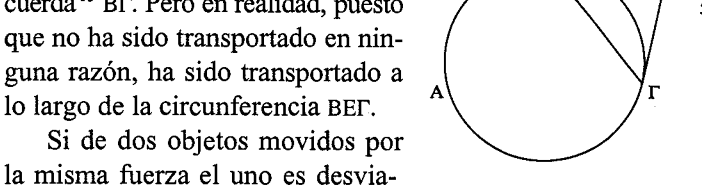
[11] «La proporción», se entiende.

[12] Entiéndase «en ninguna proporción fija».

fuera transportado en alguna razón en algún tiempo, es fuerza que durante este tiempo el movimiento sea recto por lo dicho anteriormente, de manera que será curvo si es movido en dos movimientos en ninguna razón en ningún tiempo.

A partir de esto resulta evidente que el radio es movido según dos movimientos a la vez[13] y también que lo movido [en línea recta][14] se mueve sobre la perpendicular de 849a
manera que ella sea a la vez perpendicular desde el centro.

Sea el círculo ABΓ y muévase el extremo B hacia Δ. En algún momento llega a Γ. Si hubiera sido transportado en la razón que guarda BΔ con ΔΓ, habría sido transportado a lo largo de la cuerda[15] BΓ. Pero en realidad, puesto que no ha sido transportado en ninguna razón, ha sido transportado a lo largo de la circunferencia BEΓ.



Si de dos objetos movidos por la misma fuerza el uno es desviado más y el otro menos, es razonable que se mueva más despacio el más desviado que el menos desviado. Lo cual parece acontecer en el caso de los radios mayores y meno-

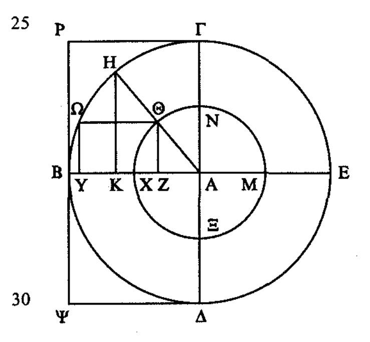
[13] En términos actuales se diría que el movimiento del punto sobre la circunferencia es consecuencia de dos movimientos: tangencial (ley de inercia) y centrípeto (fuerza que violenta al punto a conservar su distancia al centro). Esta es la causa dinámica (Galileo y Newton). Lo que el tratadista nos presenta es un análisis, también válido, puramente cinemático, en el que nos da una descripción fenoménica —no una explicación causal— del movimiento del punto sobre la circunferencia.

[14] Cappelle propone secluir las palabras entre corchetes, lo que da un texto más coherente; también Forster acepta la corrección.

[15] El griego emplea el término *diámetros,* que habitualmente se refiere al «diámetro de una circunferencia» o a la «diagonal de un paralelogramo»; evidentemente aquí, de acuerdo con la figura, tiene el significado de «cuerda».

res. Por estar el extremo del menor más próximo al punto que permanece inmóvil que el del mayor, al ser atraído en sentido contrario, el extremo del menor es llevado hacia la parte media más lentamente. Y eso le ocurre a cualquier radio, y se mueve a lo largo de la circunferencia por un lado hacia fuera, según un movimiento acorde con la naturaleza[16]; por otro lado hacia el centro, contra naturaleza[17]. La menor es movida en mayor grado contra naturaleza, pues por estar más próxima al centro se ve más atrapada por lo que la atrae. Que el menor de los radios se mueve más contra naturaleza que el mayor es evidente a partir de lo que sigue:

Sea un círculo BΓΔE y dentro de él otro menor XNMΞ con el mismo centro A. Y trácense los diámetros ΓΔ y BE en el círculo mayor y MX, NΞ en el círculo menor. Y complétese el rectángulo[18] ΔΨPΓ. Si, en efecto, el radio AB ha de llegar al mismo punto del que partió hacia AB, es evidente que es llevado hacia sí mismo. Igualmente AX ha de llegar hasta AX. Pero AX se mueve más despacio que AB, como se ha dicho, por ser mayor la desviación y ser más atraído AX en sentido contrario.



Trácese AΘH y desde Θ trácese la recta ΘZ perpendicular a AB en el círculo y de nuevo, desde Θ, trácese ΘΩ paralela a AB y ΩY perpendicular a AB, y trácese HK. En efecto, las

[16] La fuerza vertical tangente a la circunferencia (movimiento natural).

[17] La fuerza centrípeta (movimiento violento o contra naturaleza).

[18] Recibe aquí el rectángulo por nombre el adjetivo *heteromḗkēs* «el de dos longitudes», en lugar de la expresión «la figura comprendida por αβ y βδ» con que suele denominarlo Euclides.

rectas ΩY y ΘZ son iguales. Luego BY es menor que XZ. Pues rectas iguales trazadas perpendiculares al diámetro en círculos desiguales cortan un segmento de diámetro menor en los círculos mayores, y ΩY es igual a ΘZ. En el mismo 849b
tiempo en que AΘ fue transportada la distancia XΘ, el extremo de BA fue transportado una distancia mayor que BΩ en el círculo mayor. Pues el movimiento acorde con la naturaleza era igual, y el contra naturaleza, menor[19]. Y BY es menor que ZX; y tiene que ser proporcional: el movimiento acorde con la naturaleza es al acorde con la naturaleza como el contrario a la naturaleza es al contrario a la naturaleza[20].

Luego ha recorrido un arco de circunferencia HB mayor que ΩB. Y es necesario que haya recorrido la distancia HB en ese tiempo. Pues estará allí cuando coincidan proporcionalmente en ambos sentidos el movimiento contrario a la naturaleza con el conforme a naturaleza. Pues si el acorde con la naturaleza es mayor en la mayor, también el contrario a naturaleza coincidiría allí solamente, en tanto que B hubiera sido transportado la distancia BH en el tiempo que X[21]. Pues allí según el movimiento acorde a la naturaleza se hace centro para el punto B, pero según el movimiento contra naturaleza hacia KB (pues esta línea es perpendicular desde H)[22]. Y HK es a KB como ΘZ a ZX. Y esto es evidente si se trazan rectas desde los puntos B, X hasta los puntos H, Θ. Pe-

[19] Debemos entender que esa situación es la que concierne al extremo B del radio AB.

[20] Los manuales actuales de mecánica precisan que las fuerzas de inercia y centrípetas, para un mismo período o número de vueltas, son directamente proporcionales al radio.

[21] Entiéndase: «en el tiempo en que X hubiera recorrido la distancia XΘ».

[22] Toda la frase es oscura, y tengo la impresión de que se ha producido alguna alteración textual. Las traducciones inglesas de HETT y FORSTER no reflejan el texto griego.

ro si la distancia que ha recorrido B es mayor o menor que HB, entonces no ocurrirá de la misma manera ni tampoco será proporcional en ambos el movimiento acorde con la naturaleza con el contrario a la naturaleza.

Mediante lo dicho es evidente la razón por la cual el punto más distante del centro es transportado más rápidamente con la misma fuerza. A partir de ello resulta claro por qué las balanzas mayores son más exactas que las menores. Pues el soporte es el centro (ya que éste permanece quieto) y la parte del astil hacia cada uno de los lados son los radios. Así, por fuerza, el extremo del astil se mueve más deprisa con el mismo peso cuanto más diste del fiel y algunos pesos añadidos en las balanzas pequeñas no resultan evidentes a la percepción, mientras que sí son evidentes en las grandes. Pues nada impide que una magnitud se mueva menos de lo perceptible a la vista, pero en un astil grande la misma magnitud en peso hace visible el movimiento. Algunas variaciones son evidentes en ambos tipos, pero mucho más en las mayores por ser mucho mayor, con el mismo peso, la magnitud de la inclinación en las mayores[23].

[23] A pesar del esfuerzo por resolver matemáticamente la cuestión que plantea, el tratadista mezcla dos asuntos: la *precisión* de la balanza y su *sensibilidad*. Para que una balanza sea *precisa* se requiere que los brazos de la cruz tengan la misma longitud y el mismo peso, que los platillos tengan el mismo peso y que el centro de gravedad de toda la parte móvil esté situado en la vertical de la cuchilla de apoyo y por debajo de ella. La *sensibilidad* de las balanzas es directamente proporcional a la longitud de los brazos de la cruz, inversamente proporcional al peso de la cruz y guarda razón inversa de la distancia del centro de gravedad de la parte móvil al eje de suspensión de la cruz. Una balanza con los brazos más largos será, por tanto, más *sensible,* pero para que sea también más *exacta* se requerirá, como se indica al final de la cuestión, que los dos brazos tengan la misma longitud y peso, etc.

Por esto los vendedores de púrpura se las apañan para engañar al pesar, no poniendo el soporte en el medio y vertiendo plomo en una de las dos partes del astil; o usando madera de la de junto a la raíz para el brazo que quieren que se incline, o que tenga un nudo, pues es más pesada la parte 850a
del madero en la que está la raíz, y el nudo es una especie de raíz.

2 ¿Por qué la balanza recupera de nuevo si la cuerda que sirve de soporte[24] está arriba, cuando tras haberse inclinado hacia abajo se retira el peso, mientras que si está abajo no recupera, sino que se mantiene?

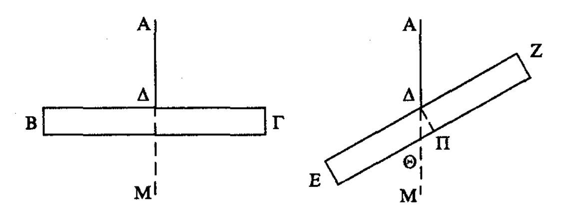
¿No será porque al estar la cuerda arriba la mayor parte de la balanza está más allá de la perpendicular?

Pues el soporte es perpendicular, de manera que por fuerza la parte mayor se inclinará hacia abajo hasta que la que divide la balanza por la mitad llegue a esta perpendicular, puesto que el peso[25] está situado en la parte levantada de la balanza.

Sea BΓ una balanza recta y sea AΔ el soporte. Al prolongarlo hacia abajo será la perpendicular AΔM. Si el peso se coloca sobre B, B llegará a estar en la posición de E, mientras que Γ pasará a la posición de Z, de manera que la recta

[24] El término que el griego emplea es *spartíon*, «cuerdecita»; esa cuerdecita serviría para mantener colgada la balanza. Pero dicho término va ampliando su significado para referirse, como vemos en esta misma frase, al soporte que sostiene la balanza estando debajo de ella. Más adelante, en la cuestión 20, veremos que ese mismo término designa también las posiciones que ocupa —o puede ocupar— la cuerda que sostiene la romana y hace función de fiel en ese tipo de balanza.

[25] El «peso» al que se refiere el párrafo es el del brazo de la balanza que quedó en la parte de arriba (ΠZ en la figura) al desequilibrarse la balanza en la pesada.

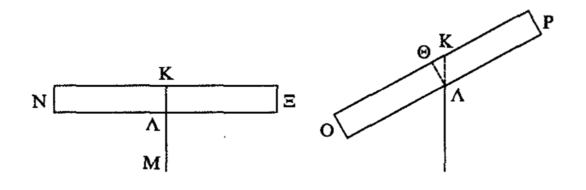


que al principio dividía la balanza por la mitad era la parte ΔM de su perpendicular, pero estando puesto el peso pasará a la posición de ΔΘ. De manera que la parte exterior de la perpendicular AM de la balanza EZ, aquélla en la que está ΘΠ, es mayor que la mitad. Luego si se quita el peso de E, por fuerza Z se desplazará hacia abajo, puesto que E es menor.

Luego por eso recupera de nuevo la balanza si tiene la cuerda arriba.

Pero si el soporte está abajo hace lo contrario. Pues la parte de abajo de la balanza es más de la mitad de como la perpendicular la divide, de manera que no recupera, pues la parte alzada por encima es más ligera.

Sea una balanza NΞ, recta, y KΛM su perpendicular. En efecto, NΞ está dividida por la mitad. Al colocar el peso sobre N, N pasará a la posición de O, Ξ a la de P y KΛ a la de



ΛΘ, de manera que la parte KO será mayor que la parte ΛP en ΘKΛ. Y una vez retirado el peso, por fuerza permanecerá

quieta. Pues tiene añadido como peso el exceso de la mitad en la que está K[26].

3 ¿Por qué fuerzas pequeñas mueven mediante la palanca grandes pesos, como se dijo ya al principio, añadiendo incluso como peso el de la palanca? Pues es más fácil mover un peso más pequeño, pero más pequeño es sin la palanca.

¿No será que la causa es la palanca, que viene a ser una balanza que tiene abajo el soporte y dividida en partes desiguales?

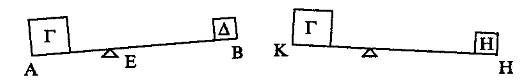
El punto de apoyo actúa como soporte, pues estos puntos permanecen quietos como centro. Puesto que por efecto del mismo peso se mueve más rápido la parte del radio más distante del centro y son tres cosas las que hay en relación con la palanca: el punto de apoyo, como soporte y centro, y los dos pesos, el motor y el movido, entonces están en pro- 850b
porción inversa el peso movido respecto al que mueve y la longitud respecto a la longitud[27]. Y siempre, cuanto mayor

26 Anota HETT: «Aristóteles está equivocado en los detalles del segundo caso. Si la balanza tiene el soporte debajo está en equilibrio inestable y, por tanto, cualquier peso colocado en un brazo produciría el efecto de hacer bajar ese brazo hasta que la balanza quedara fuera del pivote. La balanza sólo mantendría su posición si el soporte estuviera en el centro de gravedad de la balanza». La precisión —correcta— que añade HETT no invalida el análisis —incompleto pero correcto— del pseudo-Aristóteles.

27 HEATH, *History of Greek Mathematics*, vol. 1, pág. 345, al comentar este pasaje afirma: «La idea es que, al ejercer el peso una fuerza mayor, a una distancia mayor produce correspondientemente una mayor velocidad», y relaciona este pasaje con el capítulo 8 del tratado aristotélico *Acerca del cielo* (289b1-290a6). En ese texto Aristóteles pretende explicar el movimiento de los astros en sus círculos y se ocupa de la cuestión del movimiento circular (cito los textos en la traducción de M. Candel publicada en esta misma colección, núm. 249): «*...no es en absoluto absurdo, sino necesario, que los círculos tengan las velocidades proporcio-*

sea la distancia al punto de apoyo, más fácilmente se moverá. La razón es la mencionada anteriormente, que la parte del radio más distante del centro describe un círculo mayor; de manera que, mediante la misma fuerza, el motor moverá más lo que más diste del punto de apoyo[28].

Sea AB una palanca y Γ un peso; esté el motor en Δ, el punto de apoyo en E; y al moverse Δ hacia H, lo movido estará en Γ y el peso en K.



4 ¿Por qué impulsan más las naves los remeros de en medio?

¿No será porque el remo es una palanca?

El punto de apoyo es el escálamo, pues éste permanece quieto, y el peso es el mar que el remo aparta. El motor de

---

nales a sus magnitudes, ...» (289b15 y ss.) y *«Es lógico que entre círculos fijos alrededor del mismo centro sea mayor la velocidad del círculo mayor (pues al igual que en los demás casos el cuerpo mayor se desplaza más rápidamente en su traslación propia, así también ocurre con los cuerpos movidos circularmente; en efecto, entre los segmentos de circunferencia delimitados por líneas trazadas desde el centro* (scil., «radios») *es mayor el segmento del círculo mayor, de modo que, lógicamente, el círculo mayor girará en un tiempo igual que el menor...»* (289b34 y ss.).

[28] Como señala Heath *(Mathematics in Aristotle,* pág. 235), el tratadista pone el principio de la palanca en relación con el movimiento de los radios de círculos concéntricos. También señala este autor, muy acertadamente, que todos los ejemplos de palancas que aparecen en este tratado son considerados palancas de primera clase (es decir, de aquéllas que tienen el fulcro entre la potencia y la resistencia), incluso cuando el caso es diferente (cf. cuestiones 4 y 14). Para encontrar la descripción de una palanca de segunda clase, Heath nos remite al *De Architectura,* de Vitruvio (X 3-5).

la palanca es el marinero[29]. Y siempre mueve un peso mayor cuanto más dista del punto de apoyo el que mueve el peso, pues así se hace mayor el radio y el escálamo, al ser punto de apoyo, es el centro. Y en el centro de la nave la mayor parte del remo está dentro, pues la nave es ahí más ancha, de manera que por ambas partes cabe que la mayor parte del remo de cada banda quede en la parte interior de la nave.

Así, la nave se mueve porque el extremo interior del remo avanza hacia delante al apoyarse el remo en el mar, y la nave, sujeta al escálamo, avanza con él simultáneamente en la dirección del extremo del remo. Por fuerza ha de ser impulsada en mayor medida en la dirección en que más mar aparta el remo; y aparta más en la dirección en que se encuentra la mayor parte del remo desde el escálamo.

Por eso los remeros de en medio las impulsan más: porque en el centro de la nave la parte interior del remo desde el escálamo es la mayor.

5 ¿Por qué el timón, a pesar de ser pequeño y estar al final del barco, tiene tanta fuerza que mediante una barra pequeña y la fuerza de un hombre —y ésa, suavecita— mueve las grandes masas de los barcos?

---

[29] El tratadista propone erróneamente la tesis de que el remo es una palanca de primera clase —es decir, de aquellas en las que el punto de apoyo (el escálamo) se encuentra entre la potencia (el marinero) y la resistencia (el mar)— cuando, en realidad, el remo es una palanca de segunda clase —es decir, de aquellas en las que la resistencia (el propio peso del barco) se encuentra entre la potencia (el marinero) y el punto de apoyo (el mar)—. En el mismo sentido el extenso comentario de HEATH en *Mathematics in Aristotle,* pág. 237. La afirmación de que los remos centrales son los más potentes sigue, en todo caso, siendo cierta, puesto que en efecto, el brazo de potencia de esos remos es más largo que el de los otros remos.

¿No será porque el timón es una palanca y el timonel apalanca?

El punto en que está fijado al barco es el punto de apoyo, el timón entero es la palanca, la resistencia es el mar, y la potencia es el timonel. Pero el timón no toma el mar a lo ancho, como el remo, pues no mueve el barco hacia delante, sino que le cambia la dirección mientras se mueve tomando el mar oblicuamente. Y puesto que la resistencia era el mar, al estar apoyado, cambia el rumbo de la nave en la dirección contraria. El punto de apoyo gira en sentido contrario, el
851a mar gira hacia dentro y el timón hacia fuera; y la nave sigue a éste por estar sujeta a él[30].

Por consiguiente, el remo al empujar la resistencia en anchura y ser empujado en sentido contrario por ella, la impulsa hacia delante en línea recta, mientras que el timón,

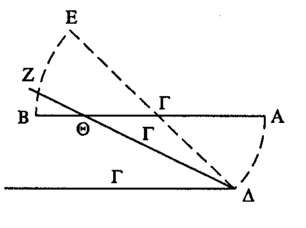
[30] Al igual que en la cuestión anterior, el autor relaciona adecuadamente el funcionamiento del timón con el principio de la palanca, pero el planteamiento no es completamente acertado. El timón con su pala, su caña y su timonel, es una palanca de primera clase, en la que el timonel aplica la potencia mediante la caña o la rueda que gobiernan la pala; el punto de apoyo es la cabeza del timón; la resistencia es la pala del timón, más grande y de más peso que la caña. Como mecanismo para variar la derrota del barco también es una palanca de primera clase, pero los elementos que intervienen son: como potencia, la fuerza que emplea el barco en su desplazamiento, fuerza que le viene dada por el empuje de los remos, la vela o el motor; como punto de apoyo, aquél por el que el timón se fija al codaste; la resistencia es la que opone el agua al desplazamiento en su seno de la pala del timón en sentido oblicuo al de la marcha de la nave. Es decir, que el timón funciona mediante la acción simultánea de dos palancas; el tratadista, al considerarlo una sola, las mezcla, y toma la fuerza del timonel que mueve la caña por la potencia que mueve el barco. El autor reconoce con acierto una de las diferencias entre el funcionamiento del remo y el del timón al precisar que el timón actúa en el agua *en posición oblicua*.

como está oblicuo, produce un movimiento oblicuo hacia un lado o hacia otro.

Y está en un extremo y no en medio porque lo más fácil es mover lo movido moviéndolo desde un extremo. Pues la primera parte es movida muy rápidamente porque, igual que en las cosas movidas al final cesa el movimiento, así también en un continuo el movimiento al final es muy débil. Y si es muy débil, es fácil desviarlo. En efecto, por eso está en la popa el timón y porque allí, con un pequeño movimiento, la distancia se hace mucho mayor en el extremo, porque el mismo ángulo establece una distancia mayor cuanto mayores sean las rectas que lo comprenden.

A partir de esto es evidente también la causa por la cual la nave avanza en dirección contraria a la de la pala del remo: la misma magnitud movida por la misma fuerza en el aire avanza más que en el agua.

Sea AB el remo, Γ el escálamo, A la parte que está en el barco, el principio del remo, y B lo que está en el mar. Si A se desplaza adonde está Δ, B no estará en la posición de E; pues BE es igual a AΔ, luego habrá avanzado lo mismo; pero era menor. Luego estará en la posición de Z. Luego Θ corta a AB y no donde estaba Γ, sino por debajo.



Pues BZ es menor que AΔ, de manera que también ΘZ es menor que ΔΘ, pues los triángulos son semejantes. También la parte de en medio, el punto Γ, habrá cambiado de posición; pues se desplaza en dirección contraria al extremo B, que está en el mar, y en la misma que el extremo A, que está en el barco. Pero A había cambiado a la posición de Δ. De manera que la nave será desplazada y está siendo transportada al lugar donde estaba el principio del remo.

Y lo mismo hace también el timón, salvo que no impulsa la nave hacia delante, como se dijo arriba, sino que sólo desplaza la popa en oblicuo a un lado o a otro, pues la proa se inclina en sentido opuesto. El punto en el que está fijado el timón hay que considerar que es el punto medio de lo movido y que hace el mismo papel que el escálamo para el remo. El punto medio cede en el mismo sentido en que se traslada la barra del timón. Si va hacia dentro, también la popa cambia de posición hacia allí; y la proa gira en sentido contrario: así, estando la proa en el mismo lugar, el barco entero cambia de posición.

6 ¿Por qué, cuanto más alta es la entena, más rápido navegan los barcos con la misma vela y el mismo viento[31]?

¿No será porque la vela es una palanca; su punto de
851b apoyo, la base en que está fijada; la resistencia que hay que mover, la nave; y la potencia, el viento en la vela?

Si cuanto más lejos esté el fulcro más fácilmente y más velozmente mueve la misma fuerza la misma resistencia, entonces, al ser llevada más arriba la entena, hace que también la vela esté más lejos de la base del palo que es el fulcro.

7 ¿Por qué, cuando pretenden navegar con el viento de popa y el viento no es de popa, disponen una parte de la vela hacia el timonel y dejan suelta la otra, la que queda hacia proa, y navegan de bolina?

[31] Para Heath, *Mathematics in Aristotle*, pág. 239, la interpretación de la vela como una palanca respecto de la nave es un concepto erróneo. Hett, en nota a este pasaje, señala que, efectivamente, una vela colocada en un lugar más alto da mayor velocidad a la nave, pero la altura puede llegar a ser excesiva y entonces, también por el principio de la palanca, el viento en la vela volcaría la nave en lugar de propulsarla.

¿No será porque el timón no puede, cuando hay mucho viento, impulsar en dirección contraria, pero sí cuando es poco y lo evitan[32]?

Entonces, el viento impulsa el barco hacia delante, el timón lo pone cara al viento, tirando en dirección contraria y apalancando el mar. Al tiempo, los marineros luchan contra el viento, pues se inclinan en la dirección contraria.

8 ¿Por qué las cosas de forma redonda y circular se mueven con más facilidad? De tres maneras se entiende que el círculo da vueltas: o bien en torno a la parte curva, moviéndose al tiempo el centro, como da vueltas la rueda del carro; o sólo en torno al centro, como las poleas, permaneciendo el centro inmóvil; o paralelo al suelo, permaneciendo el centro inmóvil, como da vueltas la rueda del alfarero.

Si esas cosas giran muy rápidamente es porque tienen poco contacto con el suelo —como el círculo, en un punto— y porque no encuentran fricción, pues el ángulo[33] queda apartado de la tierra; y, además, toca sólo un poco cualquier cuerpo con que se encuentre.

---

[32] Tampoco aquí la explicación es exacta. El tratadista pretende explicar la cuestión del gobierno de una nave con viento desfavorable como resultado de las acciones contrapuestas del timón y la vela, pero el asunto es mucho más complejo. En tal situación, los navegantes han de armonizar la acción de la vela —una palanca— con la del timón —una palanca doble— con los efectos producidos por la resistencia de dos fluidos —el agua y el aire— al movimiento de dos cuerpos —la vela y el casco de la nave— en su interior. La explicación detallada de este arte queda, sin lugar a dudas, fuera de los propósitos de esta nota.

[33] Se refiere al ángulo que forma la circunferencia con el suelo, es decir, el llamado ángulo de tangencia que Euclides estudia en *Elementos* III 26, donde demuestra que es menor que cualquier ángulo rectilíneo, es decir, igual a cero.

Mientras que si fuera un cuerpo rectilíneo, mediante la recta tocaría mucho el suelo. Además, el motor lo mueve en la misma dirección a la que se inclina por su peso. Pues cuando el diámetro del círculo es perpendicular al suelo, al tocar el círculo al suelo en un punto, el diámetro reparte por igual el peso sobre ambas partes. Cuando está en movimiento, lo empuja más al lado hacia el que se mueve, como si se inclinara a él. A partir de ahí, para el que lo empuja es más fácil moverlo hacia delante, pues es más fácil mover las cosas hacia el lado al que cada una se inclina, y es, efectivamente, difícil moverlas en sentido contrario al de su inclinación.

Además, algunos dicen que la línea del círculo[34] está en traslación constante, como las cosas que permanecen quietas, por ofrecer resistencia, igual que les ocurre a los círculos mayores en relación con los menores: mediante la misma fuerza los mayores son movidos y mueven los pesos más deprisa, porque el ángulo del círculo mayor posee cierta inclinación hacia el del círculo menor, y son proporcionalmente como el diámetro es al diámetro. Y, en efecto, todo círculo es mayor con relación a uno menor, pues los menores son infinitos; y si el círculo tiene también inclinación respecto a otro será, del mismo modo, fácilmente movible, y el círculo y las cosas movidas por el círculo tendrían otra inclinación, aunque no tocaran el suelo con la llanta, sino que fueran o paralelos al suelo o como las poleas. Y siendo así se mueven y mueven el peso muy fácilmente.

O no es por tener poco roce y fricción, sino por otra causa. Y ésa es la dicha anteriormente, que el círculo nace de dos traslaciones[35], de manera que siempre tiene una in-

[34] Es decir, «la circunferencia».

[35] Cf. 848a3 y ss. y Cuestión 1, 848b34 y ss.

clinación, y los que lo mueven lo mueven siempre como en traslación cuando lo mueven en algún sentido en torno a su circunferencia, pues a ésta la mueven en traslación.

Y lo que lo mueve impulsa el movimiento hacia su oblicuo[36], mientras que sobre el diámetro se mueve por sí mismo.

9 ¿Por qué movemos más fácil y rápidamente las cosas que son levantadas y arrastradas mediante círculos mayores? Como las poleas mayores, que son mejor que las menores, y lo mismo los rodillos.

¿No será porque cuanto mayor sea el radio más espacio recorrerá en el mismo tiempo, de modo que también llevando sobre sí el mismo peso hará lo mismo, igual que decíamos también que las balanzas mayores son más exactas que las menores[37]?

Pues la cuerda que sirve de soporte es el centro y las partes del astil que están a ambos lados de la cuerda de la balanza son los radios.

10 ¿Por qué cuando está sin peso la balanza se mueve más fácilmente que con peso? De modo parecido, también una rueda o cualquier cosa semejante se mueve más la menor y la más leve que la más pesada y mayor?

¿No será porque lo pesado es más difícil de mover no sólo en sentido opuesto, sino también en oblicuo?

Es difícil mover algo en sentido contrario a su inclinación, pero fácil en la dirección a la que se inclina. Y no se inclina a lo oblicuo[38].

---

[36] Es decir, «hacia la tangente», colaborando con la tendencia centrífuga.

[37] Cuestión 1, al final (849b20 y ss.).

[38] Como señala Heath (*Mathematics in Aristotle*, pág. 240), si la balanza —o las ruedas a que hace referencia el tratadista— estuvieran sus-

11 ¿Por qué se transportan más fácilmente las cargas sobre rodillos que sobre carros, si éstos tienen grandes ruedas y aquéllos pequeñas?

¿No será porque sobre los rodillos no sufren ninguna fricción, mientras que sobre los carros tienen el eje y se produce presión contra él?

Pues se produce fricción desde arriba y desde los laterales, mientras que lo que va sobre rodillos se mueve sobre dos puntos de ellos: la tierra que está debajo y la carga que está encima; el círculo rueda entre estos dos lugares y recibe el empuje en traslación.

12 ¿Por qué los proyectiles son enviados más lejos con la honda que con la mano, y eso que el lanzador lo domina
852b mejor con la mano que colgando el peso y, además, así mueve dos pesos, el de la honda y el proyectil, y de aquel modo sólo el proyectil?

¿Acaso porque el lanzador lo tira mientras está siendo movido en la honda —lo suelta tras haberlo volteado en círculo muchas veces—, mientras que con la mano parte del reposo?

Pues es más fácil mover lo que ya está en movimiento que lo que está en reposo.

¿O también por esto otro, porque al hacer girar la honda en la mano ésta resulta ser centro y la honda el radio, y cuanto mayor sea el radio, más rápido se mueve? Y el tiro con la mano es corto en comparación con la honda.

---

pendidas por su centro de gravedad (un punto matemático), cualquier peso, aun muy pequeño, las pondría en movimiento. Pero en realidad están suspendidas de un eje material y, como indican BLANCANO y CAPPELLE, la fricción es tanto mayor cuanto más peso hay en la balanza o en las ruedas.

13 ¿Por qué alrededor del mismo torno se mueven con más facilidad las manivelas mayores que las menores, y también, mediante la misma fuerza, mejor los cabrestantes más finos que los más gruesos?

¿No será porque el cabrestante y el torno actúan como centro y las magnitudes distantes son los radios?

Mediante la misma fuerza se mueven más deprisa y recorren más espacio los radios de los círculos mayores que los de los menores, pues mediante la misma fuerza cambia más deprisa de lugar el extremo más alejado del centro.

Por ello, en relación con el torno, utilizan las manivelas como herramientas con las que lo hacen dar vueltas con más facilidad. Y en los cabrestantes finos, es más lo exterior del madero, y ése es el radio[39].

14 ¿Por qué maderos de la misma magnitud se quiebran con más facilidad en torno a la rodilla si se parten sosteniéndolos por los extremos a la misma distancia[40] que si se

[39] El texto es difícil, como se comprueba al ver que los diversos traductores y comentaristas han dado interpretaciones claramente divergentes. La traducción que doy no coincide con ninguna de las más recientes, pero sí con la interpretación que Hurtado de Mendoza dio a este mismo pasaje. Entiendo que esta versión es preferible puesto que (1) tiene un significado coherente ella misma, (2) no se sale de la tónica del resto de las cuestiones planteadas (cosa que sí sucede en otras interpretaciones) y (3) no ha requerido ninguna corrección textual. Ha bastado la interpretación del término *zygón* no con el valor habitual de «yugo, balanza, puente de la lira», sino como referida a una máquina que, en efecto, se asemeja a los objetos mencionados: el torno. El término «árgana» que emplea aquí Hurtado de Mendoza es, evidentemente de procedencia vitrubiana, con cuya clasificación de las máquinas es coincidente.

[40] Hay que entender «a la misma distancia de la rodilla»; pero tanto en ese caso como en el expuesto a continuación —un extremo del palo en el suelo y el pie como fulcro— el tratadista nos presenta palancas de se-

sostienen por lo que está cerca de la rodilla? Y si se hace apoyándolo en tierra, también se rompe más fácilmente poniendo el pie lejos de la mano que cerca.

¿No será porque en un caso el punto de apoyo es la rodilla y en el otro el pie? Y cuanto más lejos esté del centro, más fácilmente se mueve todo. Y para que se rompa es necesario que se mueva.

15 ¿Por qué las piedrecillas de la playa son redondas, si en su origen proceden de piedras y conchas grandes?

¿No será porque lo que más dista del centro es transportado más rápidamente en los movimientos?

La parte de en medio actúa como centro, y la distancia[41] es el radio. Y con el mismo movimiento describe siempre el radio mayor un círculo mayor. Y lo que recorre un espacio mayor en el mismo tiempo es transportado más deprisa. Y, a la misma distancia, lo que es transportado más deprisa golpea con más fuerza. Y lo que golpea más es también ello mismo más golpeado. De manera que es de necesidad que se rompa siempre lo más distante del centro. Y al pasarle eso, es de necesidad que se vuelva redondo, pues a las piedrecillas, por causa del movimiento del mar, porque se mueven con él, les ocurre que están siempre en movimiento y al dar vueltas se golpean. Eso es fuerza que les ocurra sobre todo a sus bordes.

16 ¿Por qué los maderos son tanto más endebles cuanto más largos y se doblan más al ser levantados, aunque el

---

gunda clase —doble en la primera situación, simple en la segunda—. Cf. HEATH, *Mathematics in Aristotle*, pág. 241.

[41] Se refiere a «la parte de en medio de las piedras y conchas» y a «la distancia de los bordes de esas piedras y conchas hasta el centro de las mismas».

corto, de dos codos, pongamos, sea fino y el de cien codos sea grueso?

¿No será porque la longitud del madero al ser levantado actúa como palanca y resistencia y punto de apoyo?

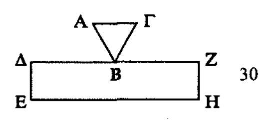
La primera parte de éste, la que levanta la mano, actúa de punto de apoyo y lo que hay sobre el extremo superior actúa como resistencia. De modo que cuanto más larga sea la parte que hay desde el punto de apoyo tanto más se doblará, por fuerza, pues por fuerza cuanto más diste del punto de apoyo tanto más se doblará. Por tanto, por fuerza han de ser levantados los extremos de la palanca.

Por consiguiente, si la palanca estuviera doblada, por fuerza se doblará más al estar levantada, como ocurre precisamente con los maderos largos, mientras que en los cortos el extremo está cerca del punto de apoyo, que está en reposo.

17 ¿Por qué mediante la cuña, que es pequeña, se hienden grandes pesos y magnitudes de cuerpos y se ejerce una fuerte presión?

¿No será porque la cuña son dos palancas opuestas entre sí y cada una de ellas tiene resistencia y punto de apoyo, el cual ejerce presión hacia arriba o hacia abajo? Además, la traslación del golpe hace grande el peso que golpea y produce movimiento. Por moverse con velocidad, lo que es movido toma aún más fuerza. La acompañan grandes fuerzas aunque es pequeña. Por ello pasa desapercibido que se mueva en comparación con el valor de su magnitud.

Sea ABΓ una cuña y ΔEHZ lo sometido a la cuña. AB resulta una palanca, la resistencia es lo que está por debajo de B, y el punto de apoyo es ZΔ. BΓ es la palanca opuesta a ésta. AΓ, al ser golpeada, usa cada una de estas como palanca y abre B.



18 ¿Por qué, si uno, poniendo dos poleas sobre dos maderos que se juntan en sentido contrario, coloca en círculo alrededor de ellas una cuerdecita, con la carga pendiente de uno de los maderos, mientras que el otro queda apoyado o aplicado por debajo de las poleas, si uno tira del extremo de la cuerda, atrae grandes pesos aunque sea pequeña la fuerza que tira?

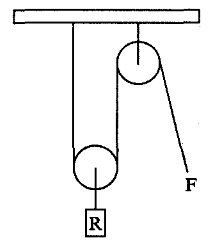
¿No será porque el mismo peso, si se le aplica una palanca, se levanta con menos fuerza que a mano?

853b La polea hace lo mismo que la palanca, de manera que una tirará con más facilidad, y con un tirón de la mano arrastrará un peso mucho mayor, y ése, levantándolo las dos poleas, lo hará a una velocidad mayor que doble. Pues una tirará menos que si tirara ella por sí misma cuando la cuerda esté echada por fuera de la otra, pues aquélla haría aún menor el peso, y así si la cuerda se echara por encima de un número mayor, con pocas poleas hay mucha diferencia, de tal manera que si con la primera se tiraba del peso mediante cuatro minas[42], con la última se tiraría de él mediante uno mucho menor[43].

---

[42] Da la impresión de que se hace referencia a experimentos llevados a cabo con pesos controlados. La mina tenía un peso aproximado de medio kilo (431 gramos la mina ático-euboica y 630 gramos la mina egineta).

[43] Creo que el tratadista se refiere a un sistema de dos poleas, una móvil y una fija. La polea fija, como se explica en los manuales de mecánica, tendría como utilidad cambiar la dirección de la fuerza sin alterarla, pero al añadir una polea móvil, habría que aplicar la fórmula correspondiente, cuyo resultado viene a ser, en el caso más habitual —cordones de las dos poleas paralelos y cuerda abrazada por la polea móvil igual a su diámetro— que la fuerza necesaria para mover la resistencia es la mitad de ésta. Cf. INCLÁN LÓPEZ, A. y MAÑAS BONVÍ,



Y en los trabajos de edificación mueven fácilmente grandes pesos, pues lo transportan de esta polea a la otra y de nuevo de aquélla a tornos y palancas. Y esto es lo mismo que hacer muchas poleas.

19 ¿Por qué si uno pone sobre un madero un hacha grande y sobre ella una gran carga no corta la madera, cosa que merece reflexión, mientras que si, levantando el hacha, uno golpea con ella, lo parte, teniendo, con mucho, menos fuerza el que golpea que lo que está encima y apretando?

¿No será porque lo lleva a cabo todo[44] mediante el movimiento, y lo pesado toma el movimiento del peso más bien en movimiento que en reposo?

Colocada encima no se mueve con el movimiento del peso, pero en traslación, con ése y con el movimiento del que golpea.

Además, también el hacha se hace cuña. La cuña, aun siendo pequeña, hiende grandes masas porque se compone de dos palancas opuestas.

20 ¿Por qué las romanas alzan las piezas de carne, pesos grandes, de un gancho pequeño, siendo en total sólo media balanza? Pues del lado donde se pone el peso cuelga sólo el platillo, mientras que en el otro está sólo el brazo de la romana.

¿No será porque ocurre que la romana es al mismo tiempo balanza y palanca?

J., *Curso de Física,* pág. 45. V. también el extenso comentario de Heath *(Mathematics in Aristotle,* págs. 242-43).

[44] Hay que sobreentender «el hacha» como sujeto de la frase.

Y es que es una balanza, en tanto que cada una de las posiciones del soporte[45] actúa como centro de la romana. Por un extremo tiene un platillo; por el otro, en vez del platillo, el contrapeso redondo, que forma parte de la balanza, como si uno añadiera el otro platillo y el contrapeso en lo alto del platillo.

Está claro que alza un peso igual de grande puesto en uno u otro platillo. Para que una balanza actúe como muchas balanzas, una balanza así comprende un número determinado de esas posiciones del soporte, de las cuales, en cada caso, lo que está a determinada distancia del contrapeso redondo es la mitad de la romana y el peso se mueve según distancias iguales de unas posiciones a otras, de manera que midan cuánto peso alza lo que está puesto en el platillo. 854a De modo que por la posición del soporte se sabe, cuando el brazo de la romana está recto, cuánto peso tiene el platillo, como se ha dicho.

Y en general, esto es una balanza, con un platillo en el que está el peso y otro en el que está el contrapeso que forma parte de la romana. Por eso la romana es por el otro lado un contrapeso redondo. Siendo así, es muchas balanzas: tantas cuantas posiciones del soporte haya. Pues siempre la posición del soporte más cercana al platillo alza también un peso mayor que el peso alzado, por ser la romana entera una palanca al revés (pues cada posición del soporte es el punto

[45] La palabra *spartíon* designaría aquí, a mi entender, no sólo la cuerdecita o soporte del que se cuelga lo que se quiere pesar en la romana, sino también las marcas en la barra de la romana que acreditan el peso. En relación con este término, cf. nota a la cuestión 2. Aunque el funcionamiento práctico de la romana es sencillo y aún podemos verlo en uso entre los vendedores ambulantes, la explicación física de su regulación y control no lo es tanto. El lector interesado puede recurrir, como en otras ocasiones, a HEATH, *Mathematics in Aristotle,* pág. 244-245.

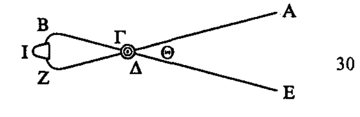
de apoyo que está arriba, y el peso lo contenido en el platillo). Pues cuanto más larga sea la longitud de la palanca desde el fulcro, con tanta mayor facilidad se mueve, y entonces actúa como contrapeso y equilibra el peso del contrapeso redondo de la romana.

21 ¿Por qué los médicos sacan los dientes con más facilidad añadiendo la tenaza[46] como peso que sólo con la mano simplemente?

¿Acaso porque el diente se escurre más con la mano que con la tenaza? ¿O se escurre más el hierro que la mano y no lo abraza en círculo, pues al ser blanda la carne de los dedos también se fija mejor y se adapta?

Es porque la tenaza son dos palancas opuestas que tienen por único punto de apoyo el contacto de la pinza. Y como lo hace moverse[47] más fácilmente, se sirven del instrumento para la extracción.

Sea A un extremo de la tenaza y B el otro, el que extrae. Una palanca es AΔZ y la otra palanca es BΓE, y el punto de apoyo es ΓΘΔ. El diente está en el punto de contacto I. Ése es el peso. Y agarrándolo simultáneamente con cada uno de los extremos BZ lo hace moverse. Y cuando lo ha movido lo extrae más fácilmente con la mano que con el instrumento.



22 ¿Por qué las nueces se cascan fácilmente sin golpe en los instrumentos que se fabrican para cascarlas? Pues se les

---

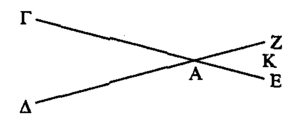
[46] Se emplea el término específico *odontágra,* cuyo significado literal sería «cazadientes», y no el general *thermastrís,* «tenaza», como un poco más adelante.

[47] «El diente», hay que sobreentender.

quita mucha fuerza, la del movimiento y la violencia y, además, se romperían más fácilmente comprimiéndolas mediante un instrumento duro y pesado que mediante uno de madera y liviano[48].

¿No será porque de este modo la nuez es comprimida por ambos lados por dos palancas, y con la palanca los pesos se dividen fácilmente?

El instrumento se compone de dos palancas que tienen
854b el mismo punto de apoyo, el punto de contacto A. Igual que si E y Z hubieran sido separadas moviéndolas mediante fuerzas en los extremos Γ y Δ, se reunirían fácilmente mediante una fuerza pequeña, la que haría el peso en el golpe, ésa la hace una fuerza superior a ella, la que hacen EΓ y ZΔ que son palancas. Con el levantamiento, son levantadas en sentidos opuestos y, al apretar, rompen lo que está en K. Por eso mismo, cuanto más cerca esté K de A, más rápido la parte. Pues cuanto más diste la palanca del punto de apoyo, más fácilmente produce más movimiento con la misma fuerza



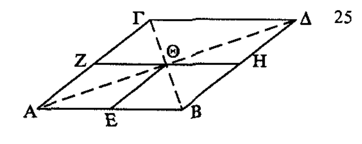
Así, A es el punto de apoyo y ΔAZ una palanca y también ΓAE. Cuanto más cerca esté K del ángulo A, tanto más cerca está del punto de contacto A. Ése es el punto de apoyo. Necesariamente, entonces, se levantará más ZE aplicándosele la misma fuerza. De manera que, puesto que el levantamiento procede del contrario, necesariamente comprimirá más, y lo más comprimido se parte más rápidamente.

[48] No reconozco el instrumento al que se refiere el tratadista. Evidentemente es una doble palanca de mecanismo más semejante al de unas tijeras (doble palanca de primera clase) que al de nuestros actuales cascanueces (doble palanca de segunda clase).

23 ¿Por qué, al ser transportados los puntos extremos del rombo en dos movimientos no recorren cada uno de ellos la misma recta, sino que el uno la recorre multiplicada[49]?

Es la misma cuestión también que la de por qué un punto que está sobre un lado, transportado recorre una distancia menor que el lado. El punto recorre la diagonal, la menor; el lado recorre el lado, la mayor; y el lado es transportado en un movimiento, el punto en dos.

Pues transpórtese A hacia B sobre el lado AB y B hacia A a la misma velocidad; transpórtese también el lado AB sobre el lado AΓ paralelo a ΓΔ con la misma velocidad que éstos; necesariamente A está siendo transportado sobre la diagonal AΔ y B sobre la diagonal BΓ y tanto el lado AB como el AΓ habrán sido recorridos al mismo tiempo. Recorra el punto A la recta AE y AB la recta AZ y trácese ZH paralela a AB y complétese desde E. La figura completada es semejante a la figura entera. Entonces AZ es igual a AE, de manera que A ha sido transportada sobre el lado AE mientras que AB habría sido transportada a lo largo de AZ. Luego estará sobre la diagonal en el punto Θ; y por fuerza éste es siempre llevado sobre la diagonal; y al mismo tiempo el lado AB recorre el lado AΓ y el punto A recorre la diagonal AΔ.



De manera semejante se demostrará también que B es transportado sobre la diagonal BΓ, pues BE es igual a BH. Entonces, una vez completado a partir de H, la figura interior es semejante a la figura entera. Y B estará sobre la dia-

[49] Se trata de un caso particular del «paralelogramo de las velocidades que ya quedó tratado en la cuestión 1.

gonal en el punto de contacto de los lados y, simultáneamen-
855a te, el lado recorre el lado y el punto B recorre la diagonal BΓ. Luego al mismo tiempo el punto B recorre multiplicada la distancia AB y el lado recorre el lado menor, si son transportados a la misma velocidad, y el lado, al ser transportado una vez ha atravesado una distancia mayor que la recorrida por A. Y es que cuanto más agudo sea el rombo, menor se hace la diagonal AΔ y mayor la diagonal BΓ; y el lado, menor que BΓ.

Y es que es raro, como decíamos, que el punto, transportado en dos movimientos, a veces sea transportado más lentamente que lo que ha sido transportado en un movimiento y que dados dos puntos con la misma velocidad uno recorra una distancia mayor que el otro.

La causa es que del punto transportado desde el ángulo obtuso nacen dos movimientos casi contrarios: el que él mismo recorre y el lado por el que es movido, mientras que del punto transportado desde el ángulo agudo ocurre que es llevado hacia el mismo punto. El ángulo del lado está en relación con el ángulo sobre la diagonal. Y cuanto más agudo forme un ángulo y más obtuso el otro, más lento será un movimiento y más rápido el otro.

Los unos[50] resultan más opuestos por ser más obtuso el ángulo, los otros van más bien hacia los mismos puntos porque las líneas tienden a coincidir. Y es que el punto B es llevado casi al mismo punto en ambos movimientos. Pues el uno está en relación con el otro, y cuanto más agudo sea el ángulo, tanto más. Y A hacia el punto contrario. Pues éste es llevado hacia B y el lado lo hace ir hacia Δ. Y cuanto más obtuso sea el ángulo, más opuestos resultan los movimien-

---

[50] Se refiere a los «dos movimientos» que ya mencionó antes y que nacen del punto transportado desde un vértice del rombo.

tos, pues la línea se hace más recta. Y si se transformara en completamente recta serían completamente opuestos. Y nada impide al lado ser transportado en un movimiento. Por tanto, razonablemente, recorre la distancia mayor.

24 No se sabe por qué el círculo mayor da la vuelta en una línea igual que el círculo menor cuando son concéntricos[51].

Sin embargo, al girar separadamente, como la magnitud de ellos es a la magnitud, así también son sus líneas[52] entre sí. Por otro lado, además, al haber uno y el mismo centro para ambos, a veces la línea que recorren al girar es de una longitud tal como la que recorre el menor al girar sobre sí mismo, y otras veces como la que recorre el mayor.

---

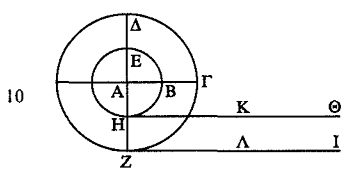
[51] Tenemos aquí el conocidísimo problema de la «rueda de Aristóteles», especialmente interesante por la agudeza matemática que se revela en su planteamiento. En su *History of Greek Mathematics,* HEATH indica que Herón en el capítulo 7 de su Mecánica —obra que se nos ha conservado sólo en árabe— intenta explicar la aporía de la rueda de Aristóteles. La explicación de Herón, dice HEATH, es que en el caso de que el círculo mayor ruede una distancia determinada, el círculo menor mantiene la misma velocidad que el mayor porque se dan dos movimientos; si consideramos el círculo menor como sujeto al mayor y sin movimiento giratorio, al desplazarse el mayor sobre su circunferencia desplazará también linealmente el centro común, y esa distancia será igual al desarrollo de la rotación del mayor y del menor *independientemente de que el menor haya rodado o no.* La solución completa del problema, en todo caso, no fue hallada sino por Galileo y publicada en 1638 en los *Diálogos referentes a dos nuevas ciencias.* Galileo estudia la cuestión observando lo que sucede con polígonos semejantes y situados semejantemente. La descripción y el estudio detallado tanto del problema aristotélico como de la solución de Galileo aparecen en HEATH, *Mathematics in Aristotle,* págs. 246-252.

[52] Esas líneas serían iguales a la distancia recorrida por un círculo que hubiera cumplido un giro de 360°, es decir, iguales a la longitud de la circunferencia correspondiente.

En efecto, es evidente que el mayor recorre al girar una línea mayor. Y es que según la percepción la circunferencia es un ángulo de su propio diámetro, mayor la circunferencia del círculo mayor, menor la del menor, de manera que, se-
855b gún la percepción, guardarán esa misma proporción entre sí las líneas que recorrieron al girar.

Pero también es evidente que recorren la misma línea al girar cuando están situados en torno al mismo centro, y así a veces ocurre que la línea que recorre al girar es igual al círculo mayor, otras veces es igual a la que recorre el menor.

Sea pues el círculo mayor ΔZΓ y el menor EHB, y sea A el centro de ambos. Y sea ZI la línea que desarrolla el mayor al girar y sea HK, igual a ZΛ la que desarrolla el menor. Si muevo el menor, muevo el propio centro A. Muévase de modo acorde el grande. Cuando AB sea perpendicular a HK, simultáneamente también AΓ resulta perpendicular a ZΛ, de modo que siempre habrá recorrido la misma distancia: una, HK, sobre la cual se ha movido el arco de circunferencia HB y otra, ZΛ, sobre la que se ha movido ZΓ. Si la cuarta parte desarrolla al girar igual longitud, es evidente que también el círculo entero desarrollará la misma longitud que el círculo entero, de manera que cuando la línea BH llegue a K, también el arco de circunferencia ZΓ habrá recorrido ZΛ y el círculo habrá desarrollado una vuelta completa.



De manera semejante, también, si muevo el grande, haciendo que el pequeño se adapte, puesto que tienen el mismo centro, AB formará ángulo recto y será perpendicular al mismo tiempo que AΓ, ésta a ZI y aquélla a HΘ. De manera que cuando la una haya recorrido una distancia igual a HZ y

la otra haya recorrido una distancia igual a ZI y de nuevo ZA sea perpendicular a ZΛ, y también AH sea de nuevo perpendicular a HK, estarán en ΘI en la disposición que tenían al principio.

Pero sin que se produzca ninguna detención del mayor respecto al menor, de manera que permanezca algún tiempo en el mismo sitio (pues ambos se mueven constantemente con ambos movimientos) y sin que el menor se salte ningún punto, es raro que el mayor recorra la misma distancia que el menor y éste la misma que el mayor. Y además, siendo un solo movimiento, es admirable que el centro cuando se mueve recorra unas veces la distancia mayor y otras veces la menor. Lo natural es que lo mismo, movido con la misma velocidad recorra la misma distancia. Y es posible que ambas veces se mueva la misma distancia con la misma velocidad.

Sobre la causa de estos fenómenos ha de ser tomado como principio el siguiente, a saber: que la misma e igual fuerza hace moverse una magnitud más lentamente y la otra más rápidamente. Si, en efecto, hubiera algo que no pudiera por naturaleza ser movido por sí mismo; si esto, al mismo tiempo, lo pone en movimiento lo que por naturaleza puede moverse, se moverá más lentamente que si se moviera por sí mismo. Y si fuera de naturaleza de ser movido, pero nada lo moviera consigo, se quedará así. En efecto, es imposible que se mueva más que lo que lo mueve; pues no se moverá 856a
con su propio movimiento, sino con el del motor.

Esté, pues, el círculo mayor en A y el menor en B. Si empujara el menor al mayor, sin rodar él mismo, es evidente que el mayor recorre de la recta tanto espacio cuanto fue empujado por el menor. Y fue empujado tanto cuanto fue movido el menor. Luego han recorrido la misma distancia en la recta. Por consiguiente, si el menor mientras gira empuja al

mayor, por fuerza con el empujón será también hecho girar simultáneamente tanto cuanto fue girado el menor, a menos que él mismo se mueva por su propio movimiento.

Así, por fuerza lo movido es movido por el motor tanto cuanto éste lo movió. Y en efecto el círculo lo movió tanto: un círculo y una de un pie[53] (sea eso lo que lo movió); entonces también el grande fue movido otro tanto. De manera semejante, también si el grande mueve al pequeño, el pequeño habrá sido movido tanto como el mayor movido por sí mismo de cualquier manera, sea deprisa o despacio; y resulta directamente que con la misma velocidad ha desarrollado una línea tan grande como la que desarrolla por naturaleza el mayor; que es lo que precisamente produce la aporía, que ya no lo hacen igual cuando se adaptan mutuamente.

Esto es: que si el uno es movido por el otro, desarrolla una línea que no es la que le corresponde ni acorde a su propio movimiento. Pues en nada difiere cuál de los dos rodea y se adapta al otro o cuál se añade al otro. De modo semejante, cuando uno mueve y el otro es movido por él, cuanto lo mueva el uno, tanto es movido el otro. Cuando el uno mueva un círculo añadido o colgado, no siempre lo hará girar; pero cuando tengan el mismo centro, por fuerza el uno será siempre hecho girar por el otro. Pero el uno no se mueve con su propio movimiento, sino como si no tuviera ningún movimiento —y si lo tuviera pero no lo usara viene a ser lo mismo—; por consiguiente, cuando el mayor, con el pequeño sujeto, lo mueva, el pequeño se mueve tanta distancia como él. Y cuando sea el pequeño quien mueva, el

[53] Aristóteles en *Sobre las líneas indivisibles* (970a6) y en *Metafísica* (1052b33) se sirve de la «línea de un pie» *(podiaía)* para ejemplificar una longitud.

grande, a su vez, se moverá la misma distancia que éste. Y por separado, cada uno se mueve a sí mismo[54].

Quien, perplejo, afirma que teniendo el mismo centro y moviéndose con la misma velocidad ocurre que éstos recorren una distancia desigual, razona de un modo falaz. Pues los dos tienen el mismo centro, pero por azar, como «musical y blanco[55]»; pues no resulta lo mismo del hecho de que sea centro de cada uno de los dos círculos. Cuando el motor sea el pequeño, actuará como centro y origen del otro, pero cuando lo sea el grande, como centro del otro. Luego no es, simplemente, que mueva lo mismo, pero en cierto sentido lo es.

25 ¿Por qué hacen los lechos con un lado doble que el otro, un lado de seis pies y un poco más y el otro de tres[56]? 865b
¿Y por qué no tensan las cuerdas según las diagonales?

¿No será que los hacen de ese tamaño para que sean proporcionados con los cuerpos? Pues así resultan con un lado doble que el otro, de cuatro codos de longitud y dos codos de anchura. Y no se tensan las cuerdas según las dia-

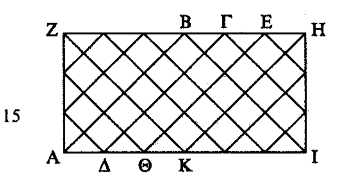
[54] Hett anota: «El aserto de Aristóteles es correcto, aunque está curiosamente expresado. Círculos concéntricos unidos tienen la misma velocidad angular, pero ruedas dentadas desiguales tienen velocidades angulares distintas».

[55] «Musical y blanco» son predicados que se dan unidos por accidente: Aristóteles emplea el mismo ejemplo de lo que aparece unido accidentalmente en *Metafísica* VI 2 1026b. En ese pasaje afirma que «no es posible estudio alguno sobre lo que es accidentalmente» y que «Los razonamientos de los sofistas tratan... más que nada acerca del accidente». En este caso, pretende el tratadista, tener en cuenta que los círculos tienen el mismo centro es considerar un aspecto accidental de la cuestión.

[56] El pie equivalía a 0,296 cm; el codo del que se habla a continuación equivalía a un pie y medio, o sea, 0444 cm. Esas equivalencias nos dan para los lechos un tamaño *standard* de algo más de 1,776 m. por 0,888.

gonales, sino de lado a lado para que los largueros se desarmen menos. Se desarman muy deprisa al separarse conforme a su naturaleza de este modo, y sufren muchísimo al tirar de ellos. Además, puesto que es preciso que las cuerdas puedan soportar un peso, así cuando se ponga el peso encima con las cuerdas cruzadas sufrirán menos que con cuerdas atravesadas. Además, así se gasta menos cuerda.

Sea el lecho AZHI y divídase ZH en dos partes iguales por B. Los huecos de ZB y de ZA son iguales, pues también los lados son iguales; luego el lado entero ZH es el doble. Se tensan como en el dibujo, desde A hacia B, luego a Γ, luego a Δ, luego a Θ, luego a E y así siempre hasta que den la vuelta en la otra esquina, pues las dos esquinas tienen los extremos de la cuerda.

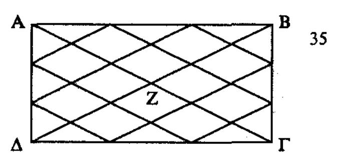


Las cuerdas entre los puntos de vuelta son iguales, AB y BΓ iguales a ΓΔ y a ΔΘ. Y las otras están en el mismo caso, que la prueba es así: AB es igual a EΘ, pues los lados de la figura BHKA son iguales, y los huecos distan lo mismo. BH es igual a KA, pues el ángulo B es igual al ángulo H, pues en figuras iguales[57] uno es el exterior y otro el interior; y el ángulo B es medio recto, pues ZB es igual a ZA y el ángulo de Z es recto. Por otro lado el ángulo B es igual al de vértice en H; pues el de vértice en Z es recto, ya que el rectángulo tiene un lado doble que el otro y ha sido cortado por la mitad. De modo que BΓ es igual a EH; y KΘ es igual a ésta, pues es paralela, de manera que BΓ es igual a KΘ. Por otro lado, ΓE es

[57] *En ísois* en el original griego: hay que entender que se refiere a paralelogramos iguales, en los que el ángulo externo es igual al interno y opuesto del mismo lado.

igual a ΔΘ. De manera semejante se demostrará también que las otras, las de cada doblamiento, son iguales dos a dos.

De modo que es evidente que cuerdas del tamaño de AB hay cuatro en el lecho. Y habrá un número determinado de huecos en el lado ZH y en la mitad ZB habrá la mitad. De manera que en medio lecho hay la misma longitud de cuerdas que en BA y tantos agujeros como en BH.



Eso es lo mismo que decir que su número es el de la suma de los que hay en AZ y BZ juntas.

Mientras que si las cuerdas se disponen según la diagonal, como están en el lecho ABΓΔ, las mitades no son del mismo tamaño que los lados de las dos AZ, ZH. Sin embargo 857a
hay el mismo número de huecos que en el ZBZA. Y los lados AZ, BZ, siendo dos, son mayores que AB. De manera que también la cuerda es mayor en la misma medida en que los dos lados juntos son mayores que la diagonal[58].

26 ¿Por qué es más difícil llevar al hombro los maderos largos por un extremo que por el centro, siendo el peso el mismo?

¿Acaso porque, al recibir sacudidas el madero, el extremo impide transportarlo, tirando más bien en sentido contrario al de la marcha con la sacudida?

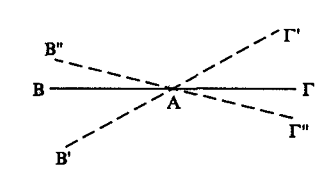
¿No es cierto que incluso si no se curva nada ni tiene mucha longitud es igualmente más difícil llevarlo por un extremo? Y porque también se levanta más fácilmente por

[58] Editores y traductores coinciden en reconocer la corrupción textual en este último párrafo. Para el último aserto, cf. Eucl., *El.* I 20.

el centro que por un extremo, por eso mismo es también más fácil llevarlo así.

La causa es que levantado por el centro siempre un extremo hace más ligero al otro y una parte levanta bien la otra. De modo que la parte de en medio actúa como centro en donde tiene lo que levanta o transporta. Entonces, cada uno de los extremos, inclinándose hacia abajo hace más ligero hacia arriba al otro. Pero levantado o transportado por el extremo no hace eso, sino que inclina todo el peso hacia un lado.

Sea A el centro del madero que es levantado o transportado, y sean B y Γ los extremos. Sea el medio A y los extremos B, Γ. Levantado o transportado por A, al inclinarse B hacia abajo levanta hacia arriba Γ, y Γ, al inclinarse hacia abajo, levanta B hacia arriba; eso hacen al ser levantados al mismo tiempo hacia arriba.



27 ¿Por qué es más difícil llevar sobre el hombro el mismo peso si es demasiado largo que si es más corto, aunque uno lo lleve por en medio?

Antes quedó dicho que la causa no es la sacudida, pero aquí la sacudida es la causa.

Pues cuando es más largo los extremos reciben mayores sacudidas, de manera que sería más difícil que lo transportara quien lo transporta. Y la causa es que recibe mayores sacudidas, porque habiendo el mismo movimiento los extremos cambian de posición tanto más cuanto más largo sea el madero. El hombro actúa como centro en el punto A —pues éste permanece quieto— y AB y AΓ son los radios; cuanto mayor sea la distancia desde el centro o AB o AΓ, más cam-

bia de posición la magnitud. Y eso ha sido demostrado antes[59].

28. ¿Por qué en los pozos hacen los cigoñales de esa manera? Añaden plomo como peso en la madera siendo la propia cubeta el peso, tanto estando vacía como llena.



Cigoñal

¿No será porque dividida la tarea en dos tiempos —pues hay que hundirlo y sacarlo hacia arriba— ocurre que vacía
se hunde con facilidad, mientras que llena se saca con difi- 857b
cultad?

El hacerlo bajar un poco más despacio favorece hacer más ligero el peso para quien tira hacia arriba. Ese efecto producen el plomo o la piedra añadidos en el extremo del cigoñal. Al hacerlo descender mediante la cuerda, el peso resulta mayor que si sólo hay que bajar la cubeta vacía. Pero cuando está llena, el plomo —o el peso añadido que sea— la hace subir, de manera que ambas cosas son más fáciles que del otro modo.

[59] V. Cuestión 1.

29 ¿Por qué cuando dos hombres llevan un peso igual sobre un madero o algo semejante no les pesa lo mismo a menos que el peso esté en el centro, sino que pesa más cuanto más cerca esté de los que lo llevan?

¿No será porque el madero actúa como una palanca respecto a los que están en esa situación? ¿La carga como punto de apoyo; de los que transportan la carga, el que está más cerca, es lo movido, y el otro de los que llevan la carga, el motor?

Cuanto más distante esté de la carga, tanto más fácilmente la mueve y más le pesa al otro hacia abajo, como si la carga puesta encima hiciera presión en la dirección contraria y actuara como punto de apoyo. Mientras que si la carga está en medio, uno no es más la carga que el otro ni el motor, sino que cada uno de los dos es la carga igual que el otro.

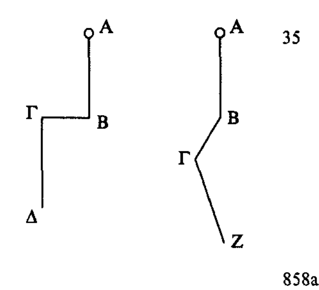
30 ¿Por qué todos los que se ponen en pie lo hacen poniendo en ángulo agudo la pantorrilla con el muslo y el muslo con el torso y si no, no podrían ponerse en pie?

¿Acaso porque lo igual es, en todos los casos, causa de reposo y el ángulo recto pertenece a lo igual y produce equilibrio? Pero también uno se mueve en ángulos iguales con la superficie de la tierra. Luego no será porque también esté en ángulo recto con el suelo.

¿No será más bien porque al levantarse se pone recto, y por fuerza el que está de pie está perpendicular a la tierra? Por tanto, si va a estar perpendicular[60], esto es, con la cabeza en línea con los pies, tiene que ir poniéndose recto mientras se levanta. Cuando está sentado tiene la cabeza paralela a los pies, y no en una línea recta.

[60] «Perpendicular a la tierra», se entiende.

Sea A la cabeza, AB el torso, BΓ el muslo y ΓΔ la pantorrilla. Mientras se está sentado, el torso AB está perpendicular al muslo y lo mismo el muslo con la pantorrilla, de modo que estando así es imposible levantarse. Por fuerza hay que doblar hacia dentro la pantorrilla y poner los pies en la vertical de la cabeza. Esto será si ΓΔ llega a estar donde ΓZ y al mismo tiempo ocurre que se ponga de pie, también tendrá la cabeza y 858a los pies en la misma línea recta. Y ΓZ está formando un ángulo recto con BΓ.



31 ¿Por qué se mueve más fácilmente lo que está en movimiento que lo que está en reposo, como ocurre con los carros, que se lleva más deprisa a los que están en movimiento que a los que empiezan a moverse[61]?

¿No será porque es muy difícil mover una carga que se mueve en sentido contrario?

Pues quita algo de la fuerza del motor incluso si fuera mucho más rápido. Pues por fuerza es más lento el empuje de lo que es empujado en sentido contrario. Y lo segundo, si está en reposo; pues también lo que está en reposo presenta una tendencia en sentido contrario, mientras que lo que se mueve en la misma dirección que lo que lo empuja obra como si uno aumentara la potencia y la velocidad del motor. Y al ser movido hacia delante produce el mismo efecto que habría experimentado por obra de ese hecho.

[61] HEATH considera acertadas las consideraciones expuestas y admite, siguiendo a CAPPELLE, que el autor nos ofrece una intuición del principio de inercia.

32 ¿Por qué dejan de moverse las cosas que se arrojan? ¿Cuando cesa la fuerza que las arroja o por resistencia o por su peso, si es mayor que la fuerza que lo lanzó?

¿O es absurdo plantearse esta dificultad cuando nos falta el principio[62]?

33 ¿Por qué algo no es llevado por su propio movimiento a menos que le acompañe y empuje lo que lo impulsó?

¿No es evidente que este efecto lo produjo lo primero el que una cosa empujara y ésta a otra?

Pero cesa cuando lo que antes empujaba al objeto transportado ya no puede actuar de modo que lo empuje, y cuando el peso transportado pesa más que la potencia hacia delante de lo que empuja.

34 ¿Por qué no son llevadas muy lejos cuando son lanzadas ni las cosas bastante pequeñas ni las grandes, sino que es preciso que haya cierta correlación con lo que lanza?

¿Acaso porque por fuerza lo lanzado y empujado ofrece resistencia en el punto en el que es empujado?

No produce lanzamiento ni empuje lo que por su magnitud no cede en absoluto o lo que por su falta de fuerza no ofrece resistencia. Lo uno, sobrepasando en mucho a la fuerza que empuja, no cede en absoluto; lo otro, siendo mucho menos fuerte, no ofrece ninguna resistencia.

¿O es que lo transportado es transportado tanto cuanto aire desplace en profundidad?

[62] El principio que le falta al tratadista es el conocimiento de la ley de la gravedad.

Lo que no se mueve nada, tampoco pondrá nada en movimiento. Y a éstos objetos[63] les ocurren ambas cosas. Lo 858b
muy grande y lo muy pequeño son como si no se movieran en absoluto: pues lo uno no mueve nada y lo otro no se mueve nada.

35 ¿Por qué los objetos movidos en aguas con remolinos son llevados al final todos al centro?

¿Acaso porque el objeto transportado tiene longitud, de manera que está en dos círculos, uno menor y otro mayor, con sus dos extremos cada uno en uno?

De modo que el mayor, por moverse más deprisa, lo hace girar y lo empuja oblicuamente hacia el menor. Puesto que el objeto transportado tiene anchura, también éste[64] hace lo mismo y lo empuja hacia el círculo interior hasta que llega al centro. Y el objeto transportado permanece quieto entonces porque guarda la misma relación con todos los círculos por estar en medio. Y es que el medio dista lo mismo de cada uno de los círculos.

¿O es porque los objetos a los que por su magnitud no domina el movimiento del agua en remolinos, sino que superan por su peso a la velocidad del círculo por fuerza han de quedar relegados y ser llevados más lentamente?

Y el círculo menor se mueve más lentamente, pues el círculo mayor hace el mismo giro que el menor en el mismo tiempo siempre que sean concéntricos. De manera que por fuerza queda relegado al círculo menor hasta que llegue al centro. Cuantas cosas domina al principio la fuerza del agua, lo seguirá haciendo hasta cesar. Pues es preciso que el peso lo dominen el uno directamente y el otro mediante la

[63] Es decir, «a los objetos muy pequeños y a los muy grandes».

[64] «El círculo menor».

velocidad, de manera que todo vaya quedando relegado hacia el círculo interior.

Pues, por fuerza, lo que no es dominado se mueve o fuera o dentro, pero es imposible que lo que no es dominado siga siendo trasladado en el mismo[65] en que está. Y aún menos en el exterior; pues la fuerza del agua es más rápida la del círculo exterior. Al objeto dominado no le queda sino cambiar de lugar hacia el interior. Y cada uno tiende siempre a no ser dominado, puesto que el límite del no moverse produce que vaya hacia en medio y sólo el centro permanece, ahí tienden a reunirse todas las cosas por fuerza[66].

[65] Entiéndase «en el mismo círculo».

[66] Las explicaciones que se ofrecen, basadas en los principios expresados al comienzo de la obra, no son acertadas, y la dinámica de fluidos es una de las ramas más complejas de la física. Si en otros pasajes, como en la «rueda de Aristóteles», había que destacar la finura de análisis para percibir los problemas, lo que aquí deja sorprendido al lector es el atrevimiento intelectual que impulsaba a estos primeros tratadistas a intentar explicar de modo racional cualquier fenómeno que llamara su atención.

EUCLIDES

ÓPTICA

INTRODUCCIÓN

LA ÓPTICA EN LA ANTIGÜEDAD GRIEGA

Para nosotros la óptica es una parte de la física que estudia las leyes y los fenómenos de la luz mientras que la visión como sensación es materia de la que se ocupa la fisiología. La ciencia griega, sin embargo, nunca se ocupó del estudio de la luz como fenómeno físico; la naturaleza de los rayos visuales y del mecanismo de la visión pertenecían a la esfera de la filosofía; y la óptica, cuyo objeto son los fenómenos relativos a la visión, forma parte de la matemática aplicada, la que, en palabras de Herón, «se ocupa de lo sensible».

La naturaleza ígnea de la luz, su capacidad de penetración y de alcanzar grandes distancias, la creencia de que los rayos visuales son emitidos por los ojos a condición de que exista una luz exterior, son ideas muy extendidas entre los antiguos. Las encontramos no sólo en Homero, sino también en Hesíodo, Píndaro y los trágicos, que utilizan para expresarlo, como señala Ch. Mugler[1], «las mismas preposiciones

[1] *Dictionnaire historique de la terminologie optique des grecs.- Douze siècles de dialogues avec la lumière,* París, 1964.

y los mismos verbos que figurarán en la terminología de las páginas ópticas de los filósofos y en los tratados de óptica».

Esas representaciones procedían del pensamiento común y tuvieron larga vigencia, puesto que Empédocles, Platón, la propia *Óptica* euclidiana, el médico Galeno y prácticamente todos los tratadistas de la Antigüedad tardía, incluyendo a Ptolomeo, admitieron esas mismas propiedades para los rayos visuales y sostuvieron que éstos parten de los ojos, como si emitieran una especie de fuego. Sólo Demócrito y los epicúreos sostuvieron, por el contrario, la opinión de que las imágenes impresionaban el ojo, en la hipótesis de que la luz era un chorro de partículas materiales proyectadas por el objeto visto, que se siguen a intervalos y alcanzan los órganos de la visión.

En el *Timeo* (45b y ss. y 64d) Platón describe el mecanismo de la visión como una *synaúgeia* o fusión de las dos radiaciones de sentido contrario en un solo cuerpo, el «cuerpo de la visión», que los seres vivos apoyan en los objetos para percibirlos: «... hicieron [*scil.* «los dioses»] que el fuego puro que reside dentro de nosotros y que es hermano del fuego exterior fluyera todo él a través de nuestros ojos de una manera sutil y continua... y cuando la luz del día se encuentra en torno a la corriente de la visión, al toparse entonces lo semejante con lo semejante, haciéndose compacto, se hace un solo cuerpo íntimamente unido en la dirección que marcan los ojos, por donde se apoya la luz que fluye de dentro con la de fuera que llega a coincidir con ella... y expandiendo esos movimientos por todo el cuerpo hasta el alma nos proporciona esa sensación a la que llamamos ver.»

Los pasajes aristotélicos relativos a este tema nos ofrecen una descripción puramente fenoménica y ponen de relieve que el Estagirita admitía, al menos en parte, las opi-

niones platónicas. La visión es una forma de movimiento —afirma— y refiriéndose a los sentidos y los objetos que les son perceptibles dice que el objeto de la vista es lo visible, y que lo visible es el color, pues el tamaño y la forma de los objetos podemos captarlos mediante otros sentidos. El color, que no es visible si no hay luz, es «un agente capaz de poner en movimiento a lo transparente en acto»; la luz, a su vez, es «el acto de lo transparente en tanto que transparente». La esencia del color «consiste en ser el agente que pone en movimiento a lo transparente en acto». De ese modo, el mecanismo de la visión consistiría en que «el color ponga en movimiento lo transparente —por ejemplo, el aire— y el órgano sensorial sea, a su vez, movido por éste último con que está en contacto». Prueba de ello es que cualquier cosa que tenga color, colocada directamente sobre la vista, no se ve *(Acerca del alma* II 7, 418a26-419b3).

En otro lugar *(Sobre la sensación* 438b3) manifiesta su discrepancia con los puntos de vista de Empédocles y Demócrito y con la *synaúgeia* propuesta por Platón y considera irracional *(álogon)* explicar el fenómeno de la visión mediante «algo que sale» de los ojos: «sea luz o sea aire lo que hay entre el objeto visto y el ojo, es el movimiento a través de ello lo que produce la visión». Esta postura aristotélica no consiguió muchos partidarios, sino que filósofos y médicos mantuvieron, en general, opiniones próximas a la teoría platónica.

Todas estas disquisiciones irían conduciendo poco a poco a la elaboración de teorías que pervivirían hasta la Antigüedad tardía, tal y como nos lo testimonia Herón refiriéndose a la óptica y sus partes[2]: «La óptica ni se ocupa de cuestiones físicas ni investiga si ciertos efluvios, proceden-

[2] *Definitiones,* ed. cit., págs. 102-108.

tes de los ojos al emitir rayos, se trasladan hacia los extremos de los objetos o si, fluyendo de los objetos sensibles, las imágenes se introducen dentro de los ojos moviéndose según el tendel o si el aire de entremedias se tensa o se trenza con el hálito brillante de la mirada, sino que sólo se fija en si se mantiene en cada supuesto la rectitud de la traslación o de la tensión y si la coincidencia [*scil.* «de los rayos visuales»] se produce acorde con un estrechamiento en ángulo, puesto que es el estudio teórico de la visión de las cosas más grandes o más pequeñas... Se podrían distinguir, según las diferentes materias, más partes de la óptica, pero las auténticas son tres: una, homónima con la general, llamada óptica[3], la catóptrica y la escenografía.»

Más adelante nos aclara el objeto de las otras dos partes de la óptica, la catóptrica y la escenografía: «Recibe el nombre de catóptrica más en general la que se ocupa de los reflejos en las superficies pulidas... Otra clase de catóptrica es la que estudia lo que ocurre con los rayos del sol en la refracción... y la ⟨catóptrica⟩ llamada ustoria... Estos son los estudios que, con los mismos presupuestos de la ⟨óptica⟩ que estudia los rayos visuales, siguen el mismo método».

En cuanto a la escenografía, Herón nos indica que esa parte de la óptica «investiga cómo conviene dibujar *(gráphein)* las imágenes de los edificios».

Vitruvio[4] nos amplía esta noticia indicándonos que «fue Agatarco quien por vez primera, mientras Esquilo hacía representar en Atenas sus tragedias, pintó las decoraciones, y de ello nos ha dejado un tratado. Aleccionados por esto, Demócrito y Anaxágoras escribieron sobre el mismo tema».

---

[3] La óptica «homónima con la general» es, evidentemente, la que se ocupa de las materias que acaba de enumerar.

[4] *Los diez libros de Arquitectura,* VII Prefacio, 10-11.

El nacimiento de la óptica científica se produce en torno a 300 a. C. con la *Óptica* de Euclides, el primero y más importante de los dos escritos griegos sobre óptica que se nos conservan; el otro es un texto, muy próximo a la *Óptica* euclidiana, que Heiberg publica bajo el título de *Opticorum recensio* y atribuye a Teón (s. IV d. C.).

El parentesco entre ambos tratados es evidente, puesto que coinciden en el número y contenido de las Definiciones y en los enunciados de la mayor parte de los teoremas. Sin embargo, se diferencian en que las demostraciones de la *Opticorum recensio* son más descuidadas[5] y en que la segunda va precedida de un prólogo que añade a los argumentos de carácter geométrico otros extraídos de la observación. Se está de acuerdo en que este prólogo no pudo ser redactado por el propio Teón, puesto que se le menciona como tercera persona, y suele atribuirse a algún discípulo suyo.

Los otros textos sobre esta materia son dos tratados con el título de *Catóptrica* (uno de Herón de Alejandría y otro atribuido a Euclides) y otras dos obras más que se ocupan de óptica y de catóptrica simultáneamente: la *Óptica* de Ptolomeo (s. II d. C.) y las *Optikaì Hypothéseis* de Damiano (s. IV d. C.).

LA *ÓPTICA* EUCLIDIANA

Desde el punto de vista filológico, la cuestión que más debate ha suscitado es la de su autoría. Dos de las opiniones

---

[5] Ésta es la razón por la que he preferido no incluir la traducción de la *Opticorum recensio Theonis* en este trabajo, considerando que el matemático interesado en estos temas preferirá vérselas con el texto más fielmente conservado, mientras que el filólogo no tendrá empacho en recurrir a los originales.

más autorizadas a este respecto son las de Heiberg y Stamatis, los más recientes editores de las obras de Euclides.

Stamatis se pronuncia a ese respecto de un modo lapidario: en su opinión no es auténtico. Heiberg, sin embargo, aun cuando observa que la *Óptica* no posee el orden, la claridad o el rigor matemático de los *Elementos,* no ve razón bastante para dudar de su fuente euclidiana. En el fondo, las dos opiniones vienen a ser coincidentes. A la luz de los testimonios antiguos resulta difícil negar que Euclides dedicó algún escrito a este tema: la referencia que se hace a él en los *Fenómenos,* las menciones de los matemáticos Teón y Proclo y la propia existencia de la *Opticorum recensio* de Teón son inequívocas. La cuestión radica, más bien, en determinar si lo que se nos ha transmitido como *Óptica* de Euclides son los *ipsissima verba* del matemático. Y, en efecto, como reconocía Heiberg, en la *Óptica* no encontramos ni el orden ni la claridad que caracteriza a los *Elementos.* Es decir, que probablemente nos encontramos ante una recensión de autor anónimo basada en una obra de Euclides y que, por presentar un rigor matemático mayor que la *Opticorum recensio,* parece más fiel al original. Luego, como quiere Stamatis, la obra no es auténtica y, como quiere Heiberg, no hay razón bastante para dudar de su procedencia euclidiana.

Heath apoya sin reservas la opinión de Heiberg; Lejeune, cuyo trabajo se centra fundamentalmente en la *Óptica* de Ptolomeo y utiliza la de Euclides como término de comparación para la valoración de la obra ptolemaica, no entra a debatir esta cuestión, sino que toma el texto publicado por Heiberg como la «versión original... que representa el estado de esta ciencia hacia el año 300 a. C.»[6].

[6] LEJEUNE, *Euclide et Ptolémée...,* pág. 10.

En cuanto a la *Opticorum recensio,* huelga decir que si antes se había dudado de su autenticidad, tras la publicación por Heiberg del texto de la *Óptica* cuya traducción ofrecemos hay acuerdo unánime en admitir que no se trata de una obra original de Euclides.

Al analizar el contenido, aparecen en la *Óptica* siete definiciones y cincuenta y ocho proposiciones. Entre las definiciones hay que destacar por su interés la número 1, en la que se afirma que los rayos visuales se propagan en línea recta, y la número 2, según la cual la figura contenida por los rayos visuales tiene forma de cono.

Las proposiciones intentan deducir a partir de las definiciones, los efectos de la distancia en nuestra percepción visual de los tamaños (por ejemplo, las proposiciones 2, 4, 5, 7 y 37-47) y las formas (prop. 6 y 22, por ejemplo); los fenómenos ópticos relacionados con la esfera (prop. 23-27), el cilindro (prop. 28 y 29) y el cono (prop. 30-33) vistos en diferentes condiciones; otras proposiciones (18-21) nos ofrecen la resolución de ciertos problemas de altimetría y longimetría; las prop. 50-56 se ocupan de fenómenos ópticos relativos a figuras en movimiento; 48 y 49 se aplican a resolver la cuestión de cómo una magnitud puede ser vista en determinadas proporciones, toda vez que la proposición 8 había demostrado que el tamaño de una magnitud vista no es proporcional a la distancia que la separa del ojo. La mayor parte de las proposiciones trabajan sobre el supuesto de la visión monocular (sólo 25, 26, 27 y 28 escapan a esta generalización) y ninguna proposición trata el tema del color.

Desde el punto de vista científico, la *Óptica* de Euclides se organiza, al igual que los *Elementos,* de acuerdo con el método axiomático y su modelo es el tratado geométrico. De la terminología empleada se deduce —aunque la obra no

lo afirma— que la visión se produce mediante unos rayos que proceden del ojo y que se propagan en línea recta. El primer aserto es falso, pero el segundo es cierto y permite a las demostraciones un cierto grado de veracidad, ya que a los efectos de las demostraciones es indiferente que los rayos visuales procedan del ojo, o de los objetos vistos, o que sean reflejo de una fuente lumínica independiente de ambos. Cuando decimos «veracidad», nos referimos a veracidad *matemática,* pero no física ni psicológica, ya que hay ciertos aspectos que no se tienen en cuenta: la naturaleza de la luz y su papel en el fenómeno visual; la visión binocular, que sólo se contempla en unos pocos teoremas; la naturaleza, peculiaridades y limitaciones de los órganos humanos de la visión; la participación de lo psicológico en el fenómeno visual; las cuestiones relativas al color y la percepción de los volúmenes o del relieve... La posición euclidiana es sumamente parcial, pero no completamente desacertada. Lo más interesante en el tratado viene a ser el aspecto geométrico y, ligado a éste, la aplicación de buen número de sus teoremas a la práctica del dibujo o la pintura en perspectiva. A medida que se avanza en la lectura de la obra esto se hace evidente; tan evidente, que algunas versiones renacentistas —la italiana de Egnatio Danti (Florencia, 1573) y la española de Ondériz (Madrid, 1585), por ejemplo— se presentan bajo el título de «Perspectiva».

LA CRÍTICA MODERNA

De la importancia que se concedió a la obra durante la Antigüedad y la Edad Media son testimonio la influencia que ejerció en Ptolomeo y los matemáticos griegos posterio-

res[7] y las versiones árabes que, traducidas a su vez al latín, permitieron en los siglos XII y XIII[8] la difusión de la obra en Occidente. Hasta el período renacentista la obra llamó por igual la atención de físicos, matemáticos y estudiosos de la perspectiva. A partir del Renacimiento, sin embargo, su suerte cambió: el interés despertado por otra obra euclidiana, los *Elementos,* y los avances en materia de perspectiva hicieron que la *Óptica* fuera perdiendo su carácter de «texto obligado» para matemáticos y artistas. En el siglo XVII se producen nuevas transformaciones en el terreno científico: se impone el método experimental y la óptica pasa a ser el estudio de la luz y los fenómenos relacionados con ella.

La *Óptica* euclidiana parecía haber sido definitivamente superada. Pero de un siglo a esta parte han ido apareciendo diversos estudios que, desde distintos campos de la actividad intelectual, han ido poniendo de relieve que la *Óptica* euclidiana participa de la característica fundamental de toda obra clásica: su lectura sigue siendo fructífera y sigue inspirando a matemáticos, teóricos del arte, filólogos y filósofos.

Heath, en su *History of Greek Mathematics* destaca como esencial el reconocimiento de que los rayos visuales son

---

[7] Papo, en el exordio al libro VI de su *Colección (Synagōgḗ),* menciona un grupo de escritos cuyo conocimiento es indispensable a quienes, ya formados en los *Elementos,* desean aplicarse a la astronomía. Puesto que son necesarios para comprender la *Sýntaxis (Composición matemática)* de Ptolomeo, reciben el nombre de *Pequeña colección astronómica (Mikròs astronomoúmenos,* en contraposición a la *Megálē sýntaxis* de Ptolomeo); no sabemos con certeza qué obras la compusieron —entre otras razones, porque pudieron variar con las épocas— pero parece que, junto con una serie de tratados astronómicos, figuraban en ella la *Óptica* y la *Catóptrica* de Euclides (LORIA, *Le scienze esatte nell'antica Grecia,* págs. 494 y 495).

[8] A este respecto pueden consultarse los trabajos de LEJEUNE, LINDBERG y THEISEN citados en la bibliografía.

rectos y entre las proposiciones concede especial importancia a la proposición 8 —que demuestra que los tamaños aparentes de dos objetos iguales y paralelos no son proporcionales a la distancia que los separa del ojo— y a la proposición 6, también fundamental en perspectiva, en la que se afirma que las líneas paralelas parecen llegar a encontrarse en la distancia.

Panofsky contrasta las experiencias de los sentidos con las teorías sobre la perspectiva tal y como las expresaron los pintores del Renacimiento italiano, los físicos y matemáticos barrocos y los propios contemporáneos del autor y utiliza en su trabajo la *Óptica* como testimonio de un determinado desarrollo en materia de perspectiva. Trata ampliamente el tema de la ilusión óptica —debida a la curvatura de nuestros órganos de visión— que nos hace ver curvas donde hay rectas y viceversa *(Ópt.*, prop. 8). Para Panofsky este hecho habría sido sobradamente conocido por los antiguos, cuya óptica era básicamente contraria a la perspectiva plana, pero este principio euclidiano contradice las teorías de los artistas del Renacimiento, y es que mientras que los antiguos sólo perseguían «formular matemáticamente las leyes de la visión natural» la *perspectiva artificialis* de los renacentistas «se esforzaba en formular un sistema prácticamente aplicable a la representación artística».

La teoría sustentada por Panofsky, que se apoya fundamentalmente en la *Óptica* y en las *Optikaì Hypothéseis* de Damiano, no carece de puntos débiles, como lo demuestra el gran número de debates que ha suscitado, pero también sigue siendo referencia obligada en las discusiones sobre este tema.

Entre los trabajos filológicos destaca el de Lejeune: para él, la *Óptica* de Euclides presenta un estadio bien desarrollado de esta ciencia, lo que hace suponer, como en el caso

de los *Elementos,* la existencia de predecesores. Los orígenes de la óptica habríamos de buscarlos en la técnica de la perspectiva artística y en las construcciones teóricas de la escenografía, lo cual explicaría por qué esta obra no es más que un tratado de perspectiva en el que se ignoran sistemáticamente todos los aspectos físicos o psicológicos del problema de la visión. La *Óptica* limita su campo de acción a lo que puede ser traducido geométricamente, haciendo siempre abstracción de la noción de relieve, del color y de la luz. Al someterse al método geométrico axiomático, excluye la posibilidad de recurrir a la observación. Al haber restringido su campo metodológico y de estudio, la *Óptica* de Euclides resulta un tratado de las ilusiones de perspectiva lineal válido, aunque incompleto.

Lejeune eligió como método de trabajo la comparación entre las dos grandes obras de óptica griegas, lo cual es sin duda un acierto; concluir en cada uno de los temas tratados la inferioridad de Euclides frente a Ptolomeo tiene, sin embargo, algo de prejuicio. Las ciencias y su historia no deben ser consideradas pruebas atléticas en las que gana el que llega más lejos, sino que cada contribución al conocimiento tiene su propio valor intrínseco y cada uno de los que las aportan son merecedores de reconocimiento y aprecio aun cuando sus descubrimientos sean después superados por las generaciones posteriores.

En el terreno de la filosofía, Gérard Simon, tomando la perspectiva metodológica abierta por Michel Foucault, considera que lo que está en cuestión detrás de la óptica y su localización en el conjunto de los saberes de una época es «la arqueología de la mirada, del hombre que ve, de su relación con lo visible».

Puesto que la visión ha servido siempre, junto con el tacto, de modelo metafórico para el conocimiento, cabe con-

cluir que cada gran mutación de la óptica ha podido traer consigo una transformación de la teoría del conocimiento, y viceversa: la definición técnica que da la óptica de la visión fiel o engañosa, depende conceptualmente de la idea general en torno al saber y el camino que conduce al mismo. De acuerdo con este planteamiento, el autor expone la teoría antigua de la mirada y cómo se la repartieron el ser y la apariencia.

Simon considera que existen dos elementos cruciales para interpretar correctamente las teorías ópticas de la Antigüedad. Primero, el hecho de que los antiguos no elaboraran ninguna teoría sobre la luz —tal teoría apareció con los árabes en el siglo x—; en ese sentido, la óptica antigua estudia los mecanismos de la visión, no la naturaleza y comportamientos del fenómeno luminoso. Segundo, el término *ópsis*, la «vista», designa a la vez el aspecto de lo que vemos, el hecho de ver, el órgano de la visión y el espectro de un muerto o la aparición de un dios que se deja ver. Esa polisemia produce una indistinción entre lo objetivo y lo subjetivo. De ahí, según Simon, que conceptos como «imagen», «visible», «campo visual», «visión binocular», «objeto», «sujeto» sean malinterpretados por nosotros en la idea de que la identidad terminológica supone también una identidad de campos de referencia.

Con ese planteamiento estudia los textos ópticos de Platón, Galeno, Aristóteles, Euclides y Ptolomeo, y concluye que la óptica antigua es una «analítica de la mirada», que transforma el problema de la visión en una investigación geométrica de resultados notables pero limitados, puesto que no se planteó cuestión alguna ni sobre la anatomía del ojo o la función del cerebro en la visión, ni sobre la naturaleza de la luz. Conscientes de que esta geometría no bastaba para explicar todas las apariencias, los antiguos dieron for-

ma a una psicología de las facultades en la que aparece una facultad rectora capaz de combinar los datos de varios sentidos, pero sin que haya un sujeto psíquico último, lo que la separa de nuestra psicología de la percepción. A la vez, puesto que la visión parte del ojo, no hay fenómeno óptico si no hay ojo que mire; pero una vez que el ojo mira, la visión en circunstancias normales, como proyección de nuestra sensibilidad, nos ofrece directamente «lo que es». Eso hace de la óptica la ciencia que establece, dentro de lo visible, el reparto entre lo que es y lo que no es, entre la verdad y la apariencia. Como la apariencia es siempre un error, la óptica deberá tratar de la visión fiel y de sus condiciones y, después, de la visión falseada y de los errores que provoca.

Examinando las relaciones entre la mirada, el ser y la apariencia, G. Simon termina su trabajo insistiendo en la idea fructífera que le sirve de guía: una vez comprendido que el rayo visual no es el rayo luminoso, quien pretenda devolver a la óptica antigua su antigüedad y su consistencia a la historia del pensamiento debe recorrer el camino de un largo desciframiento crítico y mantenerse alerta para alcanzar la verdadera comprensión del pensamiento antiguo.

EDICIONES Y TRADUCCIONES

Decíamos más atrás que a partir del Renacimiento la *Óptica* fue quedando relegada como consecuencia del interés suscitado por los *Elementos* y de las nuevas teorías sobre perspectiva; llegó a ser tan menospreciada que Peyrard, uno de los editores de Euclides mejor considerados, optó por no incluirla en su edición ni siquiera como apéndice. En relación con esto no podemos olvidar que desde su primera edi-

ción, la versión latina de Zamberti (Venecia, 1505), hasta la edición de Heiberg, lo que se publicaba no era el tratado que ahora ofrecemos, sino que bajo el título de *Óptica* se contenía el texto que Heiberg denomina *Opticorum recensio* y atribuye a Teón. La versión de Zamberti indicaba en el interior del volumen que el texto era el de Teón, pero lo que anunciaba en su portada era la *Optica* de Euclides.

La *editio princeps* del texto griego (París, 1557) —con la *Opticorum recensio*— fue obra del helenista y matemático francés Jean Pena, quien incluyó su propia traducción latina, así como las versiones griega y latina de la *Catóptrica.* Gregory (Oxford, 1703) reproduce las versiones grecolatinas de Pena.

La *Opticorum recensio* fue la única conocida hasta 1882, cuando Heiberg publicó el texto del Vindobonense XXXI, 13 (s. XII), manuscrito más completo que los conocidos hasta entonces. Posteriormente descubrió otras copias de esa misma versión de la *Óptica,* y con ellas preparó su edición, que sigue siendo considerada la mejor de las versiones impresas.

Como consecuencia del interés de la obra, en fechas relativamente recientes han aparecido diversas traducciones a las lenguas occidentales. Reseñaremos la francesa de Ver Eecke con introducción y notas (París, 1959^2) y la inglesa de Burton, sin introducción ni notas, aparecida después de la muerte del traductor; ambas están basadas en la edición de Heiberg. En italiano tenemos la versión de Ovio (Milán, 1918), de excelente comentario; aunque afirma en la introducción haberse servido de los textos de Pena y Heiberg, traduce sólo el texto editado por Pena, es decir, el de la *Opticorum Recensio Theonis.*

En España se publicaron en Madrid, en la casa de la viuda de Alonso Gómez, dos ediciones de la *Perspectiva y*

Especularia de Euclides, traducidas por Pedro Ambrosio Ondériz, miembro de la *Academia Real Mathematica* fundada por Felipe II en 1582[9]. La versión de Ondériz, como puede deducir el lector a partir de lo indicado más arriba, no recogía la *Optica,* sino la *Opticorum recensio* de Teón. En su «Al lector» que precede al texto, Ondériz manifiesta haber llevado a cabo la traducción «quan fielmente pude arrimandome al antiguo exemplar en que Euclides excelentissimo geometra la compuso»; como vio P. Ver Eecke, Ondériz tomó como base la versión latina de Pena, puesto que incluye interpolaciones y errores procedentes de la misma. Aún así, la traducción de Ondériz es cuidadosa e incluye los escolios editados por Pena junto a las proposiciones y demostraciones. Es posible que Ondériz tuviera también a la vista la traducción al italiano de la edición de Pena, que había publicado poco antes Egnatio Danti (Florencia, 1573), con la que coincide en algunos puntos de terminología que no pueden ser casuales y de la que toma múltiples referencias a los *Elementos* que no aparecen en el trabajo de Pena. Sólo en un punto se permite Ondériz la infidelidad respecto a su modelo: aunque las ilustraciones reproducen, en general, las de la edición de Pena, algunas son sustituidas por dibujos en perspectiva inspirados en el texto.

La presente versión directa del griego es la primera que se publica en español; para la traducción he seguido el texto

---

[9] Sobre esta Academia de fundación real puede consultarse la obra de J. Rey Pastor, *Los matemáticos españoles del siglo XVI,* Madrid, 1938. Este trabajo ha sido puesto al día y ampliado mediante abundantes referencias bibliográficas en la obra que lleva por título *Institucion de la Academia Real Mathematica* (Madrid, 1995) de J. Simon Díaz y L. Cervera Vera, quienes han editado en facsímil y con estudios preliminares el documento en el que J. de Herrera, inspirador y miembro eminente de la Academia, explicita el plan de estudios de la misma.

de Heiberg. He incluido además en nota, tras la proposición 23, otros dos teoremas, procedentes de la versión latina de esta misma obra, que tomo de la edición de W. R. Theisen. En ellos se contienen demostraciones que se dan por supuestas en proposiciones posteriores y que aparecen en la mayor parte de los manuscritos latinos, por lo que representan una sólida tradición en la historia textual del *Liber de visu*.

PASAJES EN LOS QUE ME APARTO DEL TEXTO DE HEIBERG

Pasajes	Texto de Heiberg	Conjetura adoptada
108, 17 (prop. 50)	N (utrumque)	X (Weissenborn)
116, 18 (prop. 56)	οἰόμενα	φαινόμενα (Heiberg)
116, 19 (prop. 56)	ἐλάττονα	μείζονα (Heiberg)

DEFINICIONES [1]

1. Supóngase que las líneas rectas trazadas a partir del ojo se propagan a lo largo de un espacio de grandes magnitudes [2].
2. Y que la figura contenida por los rayos visuales es un cono que tiene el vértice en el ojo y la base en los extremos de los objetos vistos.
3. Y que se ven los objetos en los que los rayos visuales inciden y no se ven aquellos objetos en los que los rayos visuales no inciden.
4. Y que los objetos que se ven bajo un ángulo mayor parecen mayores; los que bajo un ángulo menor, menores, y los que se ven bajo ángulos iguales, iguales.

---

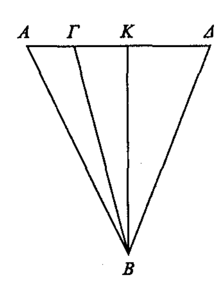
[1] A pesar de que la denominación *hóroi* («definiciones») aparece en todos los manuscritos se trata más bien de postulados o lemas.

[2] Interpreto el pasaje de un modo literal y coincido en ello con HEATH (*A History...*, vol I, págs. 441-2). VER EECKE, sin embargo, traduce «se propagan con divergencia en las grandes magnitudes», y anota que «en la concepción euclidiana los rayos visuales brotan del ojo y se propagan en líneas rectas que divergen de modo que comprendan en su ángulo la magnitud vista». Efectivamente, esa es la concepción euclidiana, como se desprende de la Definición 2; a mi entender, sin embargo, eso no se dice en la Definición 1. Cabe también que nos planteemos si no se habrá producido una alteración textual.

5. Y los que se ven bajo ángulos más elevados parecen más elevados, y los que se ven bajo ángulos más bajos, más bajos.
6. Y, de manera semejante, parecen más a la derecha los que se ven bajo rayos más a la derecha y más a la izquierda los que se ven bajo rayos más a la izquierda.
7. Los objetos que se ven bajo mayor número de ángulos aparecen con más precisión.

Proposición 1

Ninguno de los objetos vistos se ve entero al mismo tiempo[3].



Sea AΔ el objeto visto y sea B el ojo a partir del cual incidan los rayos visuales BA, BΓ, BK, BΔ.

Asi, puesto que los rayos visuales incidentes han sido prolongados a lo largo de un espacio, no incidirían continuos sobre AΔ. De manera que en AΔ se producirían espacios sobre los que no incidirán los rayos visuales [Def. 1].

Luego AΔ no se verá entero al mismo tiempo. Pero parece que se ve al mismo tiempo porque los rayos visuales se trasladan rápidamente.

[3] El hecho es cierto, pero no en razón de fenómenos ópticos, sino por razones de orden fisiológico.

PROPOSICIÓN 2

De los objetos de iguales longitudes que están situados a distancia, se ven con más precisión los que están situados más cerca.

Sea B el ojo y ΓΔ y KΛ los objetos vistos —hay que considerarlos iguales y paralelos— y esté situado más cerca ΓΔ e incidan los rayos visuales BΓ, BΔ, BK, BΛ.

No diríamos que los rayos visuales incidentes sobre KΛ a partir del ojo pasen por los puntos Γ, Δ, pues la recta KΛ del triángulo BΔΛKΓB sería mayor que la recta ΓΔ, y se ha supuesto que era igual. Por tanto, ΓΔ se ve bajo mayor número de rayos visuales que KΛ.

Luego ΓΔ aparecerá con más precisión que KΛ, ya que los objetos vistos bajo mayor número de ángulos aparecen con más precisión [Def. 7].

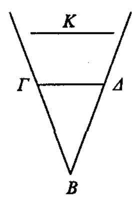
PROPOSICIÓN 3

Cada uno de los objetos vistos posee cierta longitud de separación que, una vez situado allí, ya no se ve.

Sea B el ojo y ΓΔ el objeto visto.

Afirmo que ΓΔ, situado a cierta distancia, ya no se verá.

Quede situado ΓΔ a la distancia intermedia entre los rayos visuales a la que está situado K. Así, no incidirá sobre K



ninguno de los rayos visuales que parten de B. Y aquello sobre lo cual no inciden los rayos visuales no se ve.

Luego cada uno de los objetos vistos posee cierta longitud de separación que, una vez situado allí, ya no se ve.

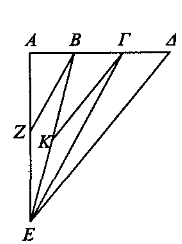
Proposición 4

De los objetos que están a distancias iguales y sobre la misma recta los que se ven a mayor distancia parecen menores.

Sean AB, BΓ, ΓΔ distancias iguales sobre una recta y trácese formando ángulos rectos AE en la cual esté situado el ojo, E.

Digo que AB parecerá mayor que BΓ y BΓ mayor que ΓΔ.

Incidan los rayos EB, EΓ, EΔ y trácese BZ paralela a la recta ΓE por el punto B. Por tanto, AZ es igual a ZE. Puesto que se ha trazado la recta BZ paralela a uno de los lados, el ΓE, del triángulo AEΓ, entonces ΓB es a BA como EZ a ZA; luego, como se ha dicho, AZ es igual a ZE. Y el lado BZ es mayor que el ZA; luego también es mayor que ZE. Y el ángulo correspondiente a ZEB es mayor que el ángulo correspondiente a ZBE; y el correspondiente a ZBE es igual al correspondiente a BEΓ; por tanto, también el correspondiente a ZEB es mayor que el ángulo correspondiente a ΓEB.



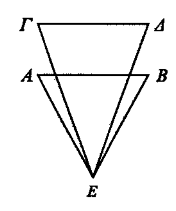
Luego AB se verá mayor que BΓ [Def. 4]. Y si de manera semejante de nuevo se trazara una paralela a ΔE por el punto Γ, se verá mayor BΓ que ΓΔ.

Proposición 5

Las magnitudes iguales situadas a distancias desiguales parecen desiguales, y parece siempre mayor la que está situada más cerca del ojo.

Sean AB, ΓΔ, dos magnitudes iguales y sea E el ojo, respecto al cual están situadas a distancias desiguales, y esté más cerca AB.

Digo que AB parecerá mayor.



Incidan los rayos AE, EB, EΓ, EΔ. Puesto que los objetos vistos bajo ángulos mayores parecen mayores [Def. 4] y el ángulo correspondiente a AEB es mayor que el correspondiente a ΓEΔ, entonces AB parecerá mayor que ΓΔ.

Proposición 6

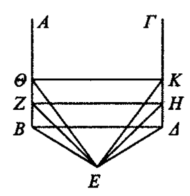
Los espacios paralelos vistos de lejos parecen convergentes[4].

[4] En el original, *anisoplatê,* «de anchuras distintas»; ése es el único valor que da a la expresión el diccionario griego inglés de Liddell-Scott e igualmente el de Rodríguez Adrados; el diccionario de Mugler no recoge la palabra; a la vista de la ilustración, sin embargo, entiendo que ése es el significado que hay que dar al término —Ver Eecke ofrece esa mis-

Sean dos magnitudes paralelas AB, ΓΔ y sea E el ojo.

Digo que AB, ΓΔ parecen convergentes y que el espacio más cercano parece mayor que el más lejano.

Incidan los rayos EB, EZ, EΘ, EΔ, EH, EK y trácense las rectas BΔ, ZH, ΘK. Puesto que el ángulo correspondiente a BEΔ es mayor que el ángulo correspondiente a ZEH, entonces también parece mayor BΔ que ZH [Def. 4]. A la vez, puesto que el ángulo correspondiente a ZEH es mayor que el ángulo correspondiente a ΘEK, entonces también parece mayor ZH que ΘK. Luego la distancia BΔ parece mayor que ZH y ZH mayor que ΘK.



Luego las distancias que son paralelas ya no se verán de la misma manera, sino convergentes.

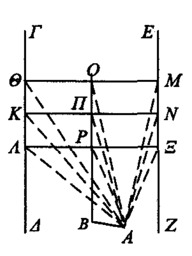
En el caso de los espacios que están situados en un plano elevado, trácese la perpendicular AB desde el punto A al plano supuesto y sean paralelas ΛΞ, KN, ΘM.

Digo que también así las magnitudes ΓΔ, EZ parecen convergentes.

Trácese BP perpendicular desde B a ΛΞ y prolónguese BP hasta O e incidan los rayos AΛ, AK, AΘ, AΞ, AN, AM y trácense AP, AΠ, AO. Puesto que se ha trazado una recta AP desde el punto elevado A hasta PΞ, entonces AP es perpendicular a PΞ, y AO es perpendicular a OM y AΠ a ΠN. Luego los trián-

ma explicación en nota— mientras que la traducción etimológica del mismo deja la frase incomprensible; de ahí que prefiera apartarme de versiones anteriores y hacer el texto comprensible al lector actual. Obsérvese que nos encontramos aquí ante una de las proposiciones fundamentales en perspectiva, la de la coincidencia aparente de las paralelas en la distancia.

gulos ΑΡΞ, ΑΠΝ, ΑΟΜ son rectángulos. Y, puesto que son rectángulos, ΠΝ es igual a ΡΞ y ΠΑ es mayor que ΑΡ, luego el ángulo correspondiente a ΞΑΡ es mayor que el correspondiente a ΠΑΝ. Luego también se verá mayor ΡΞ que ΠΝ [Def. 4]. De manera semejante, también ΡΛ se verá mayor que ΠΚ. Luego toda la magnitud ΛΞ se verá mayor que toda la magnitud ΠΚ.



Luego también así las magnitudes se verán convergentes.

Proposición 7

Las magnitudes iguales que están sobre la misma recta sin estar puestas una a continuación de otra y situadas a distancias desiguales del ojo parecen desiguales.

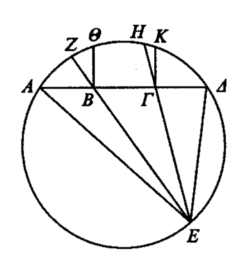
Sean ΑΒ, ΓΔ dos magnitudes iguales sobre la misma recta ΑΔ sin estar puestas una a continuación de otra y situadas a distancias desiguales del ojo Ε, e incidan los rayos ΕΑ, ΕΔ y sea ΕΑ mayor que ΕΔ.

Digo que ΓΔ parecerá mayor que ΑΒ.

Incidan los rayos ΕΒ, ΕΓ y circunscríbase el círculo ΑΕΔ en torno al triángulo ΑΕΔ. Y sean las rectas ΒΖ, ΓΗ prolongación de las rectas ΕΒ, ΕΓ; y trácense formando ángulos rectos desde los puntos Β, Γ las rectas iguales[5] ΒΘ, ΓΚ. Por otro la-

[5] No se demuestra que esas dos rectas sean iguales; VER EECKE anota que puede demostrarse sin recurrir a otra figura prolongando ΘΒ y ΚΓ hasta el diámetro paralelo a ΑΔ; teniendo en cuenta que ΘΒ y ΚΓ son equidistantes del centro de la recta ΑΔ, serían también equidistantes del centro y por tanto las prolongaciones mencionadas serían semicuerdas iguales;

do, AB es igual a ΓΔ, y también el ángulo correspondiente a ABΘ es igual al correspondiente a ΔΓK. Por tanto, el arco de circunferencia AΘ es igual al arco de circunferencia ΔK.



Por tanto, el arco de circunferencia KΔ es mayor que el arco de circunferencia ZA. Por tanto, el arco de circunferencia HΔ es mucho mayor que el arco de circunferencia ZA. Pero el ángulo correspondiente a AEZ está sobre el arco de circunferencia ZA, y el correspondiente a HEΔ está sobre el arco de circunferencia HΔ. Por tanto, el ángulo correspondiente a HEΔ es mayor que el correspondiente a AEZ. Y AB se ve bajo el correspondiente a AEZ y ΓΔ bajo el correspondiente a HEΔ.

Luego ΓΔ parece mayor que AB [Def. 4].

Proposición 8

Las magnitudes iguales y paralelas situadas a distancias distintas del ojo no se ven proporcionalmente a las distancias[6].

Sean dos magnitudes AB, ΓΔ situadas a distancias distintas del ojo E.

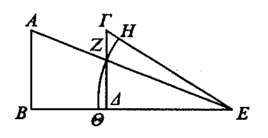
Digo que no cabe, como parece ser, que ΓΔ sea a AB como BE a EΔ.

---

restándoles la parte igual comprendida entre AΔ y el diámetro paralelo a ella, resulta que también ΘB y KΓ son iguales.

[6] Según Heath *(A History...,* vol. I, pág. 442) esta proposición prueba el equivalente del hecho siguiente: si α, β son dos ángulos y se cumple que $\alpha < \beta < \frac{1}{2}\pi$, entonces $tg\ \alpha / tg\ \beta < \alpha/\beta$; en fecha algo posterior Aristarco asumiría la fórmula sin prueba.

Incidan los rayos AE, EΓ y con centro E y radio EZ trácese el arco de circunferencia de un círculo HZΘ. Puesto que el triángulo EZΓ es mayor que el sector EZH, y el triángulo EZΔ es menor que el sector EZΘ, entonces el triángulo EZΓ guarda con el sector EZH una razón mayor que el triángulo EZΔ con el sector EZΘ. Y, tomando la proporción en alternancia[7], el triángulo EZΓ guarda con el triángulo EZΔ una razón mayor que el sector EZH con el sector EZΘ y, por composición[8], el triángulo EΓΔ guarda con el triángulo EZΔ una razón mayor que el sector EHZ con el sector EZΘ. Pero el triángulo EΔΓ es al EZΔ como ΓΔ a ΔZ; y ΓΔ es igual a AB, y AB es a ΔZ como BE es a EΔ. Luego BE guarda con EΔ una razón mayor que el sector EHΘ con el sector EZΘ. Y como el sector es al sector, así el ángulo correspondiente a HEΘ al ángulo correspondiente a ZEΘ. Luego BE guarda con EΔ una razón mayor que el ángulo correspondiente a HEΘ con el correspondiente a ZEΘ. Y ΓΔ se ve desde el ángulo correspondiente a HEΘ, mientras que AB desde el correspondiente a ZEΘ.



Luego las magnitudes iguales no se ven en proporción a las distancias.

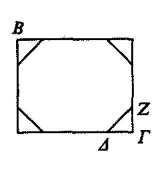
[7] Euclides emplea el término *enalláx,* definido en *Elementos* V, def. 12: «razón *enalláx* es la relación del antecedente al antecedente y del consecuente al consecuente». Repetidamente se ha señalado que tal definición conviene mejor a una proporción que a una razón; en todo caso, para nuestra traducción hemos aceptado la versión sugerida por Ch. MUGLER, *Dictionnaire...,* artíc. *lógos.*

[8] En el original, *synthénti.* Euclides define la *sýnthesis lógou* en *Elementos* V, def. 14: «La composición de una razón consiste en tomar el antecedente más el consecuente como uno en relación con el consecuente». Es decir, en la transformación de a/b :: c/d en (a+b)/b :: (c+d)/d.

Proposición 9

Las magnitudes rectangulares vistas a distancia parecen redondeadas.

Sea el rectángulo BΓ visto a distancia que se encuentra elevado. Puesto que cada uno de los objetos vistos tiene una longitud de separación que una vez que está situado allí ya no se ve [Prop. 3], entonces no se ve el ángulo Γ, sino que sólo aparecen los puntos Δ, Z. Eso sucederá de manera semejante también en cada uno de los restantes ángulos.



De modo que todo entero parecerá redondeado.

Proposición 10

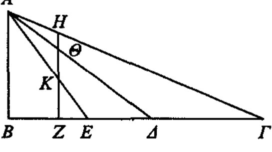
Las partes más lejanas de los planos situados por debajo del ojo parecen más elevadas.

Sea A el ojo situado más elevado que BEΓ, e incidan los rayos AB, AE, AΔ, AΓ, de los cuales AB sea perpendicular al plano supuesto.

Digo que ΓΔ parece más elevado que ΔE y ΔE más que BE.

Tómese en BE un punto al azar Z, y trácese ZH formando ángulos rectos. Puesto que los rayos visuales inciden en ZH antes que en ZΓ, incida AΓ en ZH en el punto H, AΔ en el Θ y AE en el K. Puesto que H está más elevado que Θ y Θ más

que K, mientras que Γ está en el mismo plano que H y Δ en el mismo que Θ y E en el mismo que K y, al tiempo, ΔΓ se ve mediante AΓ, AΔ; y ΔE mediante AΔ, AE; entonces ΓΔ parece más elevado que ΔE. De modo semejante también ΔE parecerá más elevado que BE, puesto que los objetos vistos bajo rayos más elevados parecen más elevados [Def. 5].



Y es evidente que los objetos situados en un plano más elevado parecerán cóncavos[9].

Proposición 11

Las partes más lejanas de los planos situados por encima del ojo parecen más bajas.

Sea A el ojo situado más bajo que el plano BΓ, e incidan los rayos BA, AΔ, AE, AΓ, de los cuales sea AB perpendicular al plano supuesto. Digo que ΓE parece más bajo que EΔ.

Por el teorema expuesto previamente, el rayo AΓ es más bajo que el AE, el AE más que el AΔ, el AΔ más que el AB. Y ΓE se ve mediante los rayos ΓA, AE mientras que EΔ se ve mediante EA, AΔ y ΔB se muestra mediante ΔA, AB.

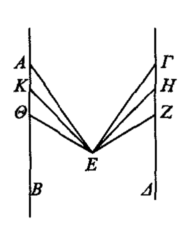
[9] Ver Eecke considera este corolario carente de sentido y lo tiene por interpolación de un escoliasta. Las implicaciones de esta proposición —y de las siguientes 11, 12, 13 y 14— con la perspectiva están emparentadas con las de la proposición 6.

Luego ΓΕ parece más bajo que ΕΔ y ΕΔ más que ΔΒ [Def. 5].

Proposición 12

De los objetos que tienen longitud hacia delante, los que están a la derecha parecen desviarse hacia la izquierda y los que están a la izquierda, hacia la derecha [Def. 9].

Sean ΑΒ, ΓΔ dos magnitudes vistas y sea Ε el ojo desde el cual incidan los rayos ΕΘ, ΕΚ, ΕΑ, ΕΖ, ΕΗ, ΕΓ. Digo que ΕΖ, ΕΗ, ΕΓ parecen cambiar de dirección hacia la izquierda, mientras que ΕΘ, ΕΚ, ΕΑ hacia la derecha.



Puesto que ΕΖ está más a la derecha que ΕΗ y ΕΗ más que ΕΓ, a partir de ello da entonces la impresión de que ΕΓ cambia de dirección hacia la izquierda de ΕΗ y ΗΕ a la de ΕΖ. También, de manera semejante, ΕΚ, ΕΑ, ΕΘ parecen desviarse hacia la derecha [Def. 6].

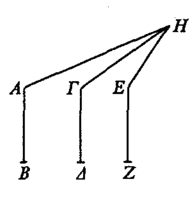
Proposición 13

De las magnitudes iguales situadas bajo el mismo ojo las más lejanas parecen más elevadas.

Sean ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ magnitudes iguales y sea Η el ojo, situado más elevado que las magnitudes, e incidan los rayos ΗΑ, ΗΓ, ΗΕ.

Digo que ΑΒ parece más elevado que ΓΔ, y ΓΔ más que ΕΖ.

Puesto que HA está más elevado que HΓ y HΓ más que HE y puesto que los puntos A, Γ, E están en el mismo plano que los rayos HA, HΓ, HE y las magnitudes AB, ΓΔ, EZ están en el mismo plano que A, Γ, E, entonces AB parece más elevado que ΓΔ y ΓΔ más que EZ[10].

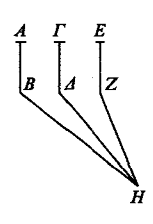


Proposición 14

De las magnitudes iguales y situadas por encima del ojo, las más lejanas parecen más bajas.

Sean AB, ΓΔ, EZ magnitudes iguales situadas más arriba que el ojo H.

Digo que AB parece más bajo que ΓΔ y ΓΔ más que EZ.



Incidan los rayos HB, HΔ, HZ. Puesto que el rayo HB es más bajo que el HΔ y el HΔ más que el HZ, mientras que los puntos B, Δ, Z están en el mismo plano que los rayos HB, HΔ, HZ y las magnitudes AB, ΓΔ, EZ están en el mismo plano que B, Δ, Z, entonces AB parece más bajo que ΓΔ y ΓΔ más que EZ[11].

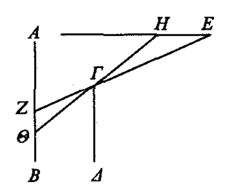
[10] El teorema se limita a demostrar que los puntos A, Γ, E son comunes a dos planos; de ello el lector deduce que están en línea recta y con ello queda reducido el planteamiento de la hipótesis al caso tratado en la proposición 10.

[11] Por el mismo sistema que en la proposición anterior, el caso queda reducido al tratado anteriormente en la proposición 11.

PROPOSICION 15

Cuantos objetos situados bajo el mismo ojo son mayores unos que otros, al acercarse el ojo, el que aparece por encima parece mayor en una magnitud mayor, mientras que al alejarse, en una magnitud menor.

Sean ΑΒ, ΓΔ dos magnitudes desiguales y sea mayor ΑΒ y sea Ε el ojo desde el cual incida el rayo ΕΖ que pasa por Γ.



Puesto que ΖΒ, ΓΔ se muestran bajo el ojo y el rayo ΕΖ, entonces ΑΒ aparece por encima de ΓΔ en la magnitud ΑΖ.

Cambie de posición el ojo a una más cercana y sea Η, desde el cual incida el rayo ΗΘ que pase por Γ. Puesto que ΓΔ y ΘΒ se muestran bajo el ojo y bajo el rayo ΗΘ, entonces ΑΒ parecerá mayor que ΓΔ en la magnitud ΑΘ. Y bajo Ε se veía mayor en ΑΖ, y ΑΘ es mayor que ΑΖ[12].

[12] Evidentemente, tal y como se plantean las proposiciones 15 y 16, parecen estar tratando un problema de perspectiva, a saber: la variación de la apariencia según el punto de vista del observador. Desde el punto de vista geométrico lo razonable hubiera sido comparar la diferencia de tamaño entre las magnitudes según que esa diferencia de tamaño estuviera dispuesta en dirección hacia el ojo o en dirección opuesta al mismo. En 15 —el caso de que la diferencia de tamaño entre los objetos estuviera en dirección al ojo— podemos resolverlo por aplicación de la definición 4: al acercarse el ojo a los objetos se ven bajo un ángulo mayor no sólo los objetos, sino también la diferencia de tamaño entre los mismos, con lo que la proposición resultaría ser un caso particular de la propos. 2.

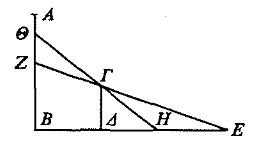
Luego al acercarse el ojo, el objeto que aparece por encima parece mayor en una magnitud mayor y, al alejarse, en una menor.

PROPOSICIÓN 16

Cuantas magnitudes desiguales entre sí sobresalen por encima del ojo, al acercarse el ojo, la magnitud que sobresale por encima parece mayor en una magnitud menor, mientras que al alejarse, en una mayor.

Sean AB, ΓΔ magnitudes desiguales, de las cuales la mayor es AB. Sea E el ojo desde el cual incida el rayo EZ que pase por Γ.

Puesto que las magnitudes ZB, ΓΔ se toman bajo el rayo EZ, entonces BZ, ΓΔ parecen iguales entre sí. Entonces AB parece mayor que ΓΔ en la magnitud AZ. Aproxímese el ojo más cerca y sea H, desde el cual incida el rayo HΘ que pase por Γ. Puesto que BΘ, ΓΔ se toman bajo el rayo HΘ, mientras que ZB, ΓΔ bajo el EZ, y ZA es mayor que AΘ, entonces, al acercarse el ojo, el objeto que sobresale por encima parece mayor en una magnitud menor y, al alejarse, en una mayor.

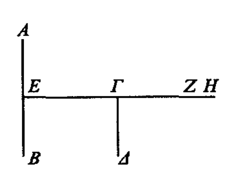


En 16 —el caso de que la diferencia de tamaño entre los objetos estuviese en dirección opuesta al ojo— se llega a la solución mediante comparación de triángulos semejantes.

Proposición 17

Cuantos objetos son mayores unos que otros, al acercarse y alejarse el ojo a la magnitud menor en línea recta[13]*, parecerá siempre que el objeto que sobresale por encima excede al menor en lo mismo.*

Sean AB, ΓΔ dos magnitudes desiguales, de las cuales la mayor es AB, y sea Z el ojo situado en línea recta con el extremo Γ de la magnitud ΓΔ. Digo que al acercarse y alejarse el ojo Z que está en línea recta parecerá que AB sobresale por encima de ΓΔ en lo mismo.



Incida el rayo ZE que pasa por Γ. Entonces AB aparece por encima de ΓΔ en la magnitud AE.

Cambie de posición el ojo H y esté más lejos y esté en línea recta. Entonces el rayo que incide desde el ojo H pasará por el punto Γ y llegará hasta el punto E y AB aparecerá por encima de ΓΔ en lo mismo.

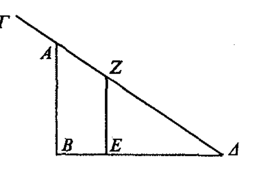
Proposición 18

Conocer de qué tamaño es una altitud dada cuando brilla el sol.

Sea AB la altura dada y sea necesario conocer de qué tamaño es. Sea Δ el ojo y ΓA el rayo de sol que se une con el

[13] Ver Eecke hace notar que para que esto se cumpla el ojo ha de moverse por una línea recta que sea perpendicular a la magnitud.

extremo de la magnitud AB y trácese [14] hasta el ojo Δ. Y sea ΔB la sombra de AB. Y póngase otra magnitud EZ que, sin ser en absoluto iluminada por el rayo, se una con él en su extremo Z. Así, se ha aplicado al triángulo ABΔ otro triángulo EZΔ. Por tanto, ΔE es a ZE como ΔB a BA [*Elem.* VI 2]. Y la razón de ΔE a EZ es conocida, luego también la razón de ΔB a BA es conocida. Y ΔB es conocido.



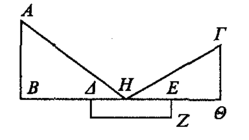
Luego también es conocido AB.

Proposición 19

Conocer de qué tamaño es la altitud dada no habiendo sol.

Sea AB la altitud y sea Γ el ojo y sea necesario conocer de qué tamaño es AB sin haber sol.

Póngase el espejo ΔZ y prolónguese ΔB en línea recta con EΔ hasta que coincida con el extremo B de la magnitud AB, e incida el rayo ΓH desde el ojo Γ y refráctese hasta que coincida con el extremo A de la magnitud AB y sea EΘ prolongación de ΔE y trácese ΓΘ perpendicular a EΘ desde Γ. Puesto que el rayo ΓH ha incidido y HA es el rayo refractado correspondiente, las refracciones se han producido en ángulos iguales, como dice en los libros de *Catóptrica* [15]. Por tanto, el ángulo



[14] Sobreentiéndase «el rayo de sol».

[15] *Catóptrica*, proposición 1. Esta frase hizo pensar durante una época que la *Catóptrica* euclidiana había sido compuesta antes que la *Óptica*

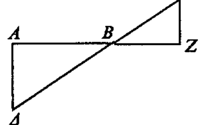
correspondiente a ΓΗΘ es igual al correspondiente a ΑΗΒ. Pero también el correspondiente a ΑΒΗ es igual al correspondiente a ΓΘΗ; y por consiguiente, el restante, el correspondiente a ΗΓΘ, es igual al restante, el correspondiente a ΗΑΒ. Por tanto, el triángulo ΑΗΒ es equiángulo respecto al triángulo ΓΗΘ. Y en los triángulos equiángulos los lados son proporcionales [*Elem.* VI 4]. Por tanto, ΓΘ es a ΘΗ como ΑΒ a ΒΗ. Pero la razón de ΓΘ a ΒΗ es conocida; luego también la razón de ΒΑ a ΒΗ es conocida; y ΗΒ es conocido.

Luego también ΑΒ es conocido.

Proposición 20

Conocer de qué tamaño es una profundidad dada.

Sea ΑΔ la profundidad dada y sea Ε el ojo y sea necesario conocer de qué tamaño es la profundidad.



Incida a la vista el rayo del sol ΕΔ que coincide con el plano en el punto Β y con la profundidad en Δ. Y prolónguese ΒΖ en línea recta desde Β y trácese ΕΖ perpendicular a la recta ΒΖ desde Ε. Así, puesto que el ángulo correspondiente a ΕΖΒ es igual al correspondiente a ΒΑΔ mientras que también el correspondiente a ΑΒΔ es igual al correspondiente a ΕΒΖ, también el tercero, el correspondiente a ΒΕΖ es igual al correspondiente a ΑΔΒ. Por consiguiente, el triángulo ΑΔΒ es

y así, en algunas ediciones, como la de Basilea de 1537, la *Catóptrica* precede a la *Óptica*. Hoy más bien consideramos que se trata de una glosa marginal que en algún momento de la transmisión manuscrita fue incluída en el texto.

equiángulo respecto al triángulo BEZ. Por tanto, los lados serán proporcionales [*Elem.* VI 4]. Luego EZ es a ZB como ΔA a AB. Y la razón de EZ a ZB es conocida; luego la razón de ΔA a AB también es conocida; y también AB es conocido.

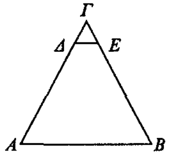
Luego también AΔ es conocido.

Proposición 21

Conocer de qué tamaño es la longitud dada.

Sea AB la longitud dada y sea Γ el ojo y sea necesario conocer de qué tamaño es la longitud AB.

Incidan los rayos ΓA, ΓB y tómese próximo al ojo Γ un punto al azar Δ sobre el rayo, y trácese desde el punto Δ la recta ΔE paralela a AB. Puesto que ΔE se ha trazado paralela a uno de los lados, BA, del triángulo ABΓ, entonces ΓΔ es a ΔE como ΓA a AB [*Elem.* VI 2]. Y la razón de ΓΔ a ΔE es conocida; luego también la razón de AΓ a AB es conocida. Y AΓ es conocido.



Luego también AB es conocido.

Proposición 22

Si se pone un arco de circunferencia de un círculo en el mismo plano en que está el ojo, el arco de circunferencia del círculo[16] *parece una línea recta.*

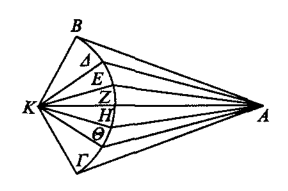
---

[16] En principio, la expresión *periphéreia* (o *periphéreia kýklou)* pueden designar tanto la «circunferencia» propiamente dicha como un «arco de circunferencia»; la demostración aquí, como podemos ver por la ilus-

Sea BΓ un arco de circunferencia de un círculo situado en el mismo plano que el ojo A, desde el cual incidan los rayos AB, AΔ, AE, AZ, AH, AΘ, AΓ.

Digo que el arco BΓ parece una recta.

Sitúese el centro de la circunferencia y sea K, y trácense las rectas KB, KΔ, KE, KZ, KH, KΘ, KΓ. Puesto que KB se ve bajo el ángulo correspondiente a KAB y KΔ bajo el correspondiente a KAΔ, entonces KB parecerá mayor que KΔ, y KΔ mayor que KE y KE mayor que KZ y, por la otra parte, KΓ parecerá mayor que KΘ, KΘ mayor que KH y KH mayor que KZ. Por ello, permaneciendo la recta KA†[17] , BΓ siempre es perpendicular. Lo mismo sucederá también en la parte cóncava de la circunferencia.



De otra manera

También es posible decir sobre estos rayos visuales que la recta entre el ojo A y el diámetro es la menor, y que la más cercana a ella es siempre menor que la más lejana. Lo mismo ocurre también siendo AZ una perpendicular sobre él[18]. Por eso la circunferencia envía la representación de una

---

traducción y, como se deduce de la última frase, se refiere a un arco de circunferencia.

[17] Al final de la proposición se detecta una laguna que, de momento, ningún estudioso se ha atrevido a colmar y que afecta a la parte final del razonamiento. Para Ver Eecke, la demostración se continuaba con la consideración de que la disminución aparente de los rayos sucesivos equivale a las sucesivas retracciones de los puntos Δ, E, Z, etc., lo que produciría el enderezamiento aparente del arco hasta transformarse en una recta perpendicular al rayo visual AZ.

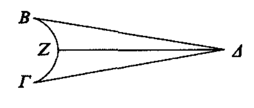
[18] Sobre el diámetro, se entiende.

recta, sobre todo si apareciera a tan gran distancia que no pudiéramos percibir su convexidad. Por eso las cuerdas que no están muy tensadas, vistas de lado, parece que tienen holgura, pero desde abajo parecen ser rectas, y las sombras de las argollas situadas en el mismo plano que lo que las ilumina son rectas[19].

De otra manera

Si se pone un arco de circunferencia de un círculo en el mismo plano que el ojo, el arco de circunferencia del círculo parece una línea recta.

Sea ΒΓ el arco de circunferencia de un círculo, y sea Δ el ojo que está en el mismo plano que el arco de circunferencia ΒΓ, a partir del cual incidan los rayos visuales ΔΒ, ΔΖ, ΔΓ. Así, puesto que ninguno de los objetos vistos se ve entero al mismo tiempo [Prop. 1], ΒΖ es una recta; y de manera semejante ΖΓ.



Por consiguiente, todo el arco de circunferencia ΒΓ parecerá una recta[20].

[19] Este pasaje más que una demostración alternativa es un comentario a la proposición anterior; un editor más crítico probablemente hubiera relegado esta parte del texto a un apéndice.

[20] La insuficiencia del razonamiento es evidente: el hecho de que los objetos no se vean enteros explicaría que no se vea *una circunferencia entera* pero no explica ni demuestra que haya de verse como una recta. Este segundo «De otra manera», al igual que el anterior, se podría también relegar a un apéndice.

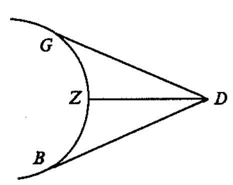
Proposición 23 [21]

Una esfera vista de cualquier manera por un ojo parece siempre menor que una semiesfera y la propia parte vista de la esfera parece una circunferencia de un círculo.

---

[21] La mayor parte de los manuscritos de la versión latina medieval de la *Óptica* incluyen entre esta proposición y la anterior dos demostraciones que no se nos han transmitido en la versión griega. Las incluyo aquí por dos razones: la primera, de orden filológico, es que el hecho de que aparezcan en la mayor parte de los manuscritos hace que representen una sólida tradición en la historia del texto; la segunda razón, relacionada con el contenido, es que en ellas aparecen demostraciones que más adelante se dan por supuestas. Para la traducción me he basado en el texto publicado por W. R. Theisen en «*Liber De Visu:* The greco-latin translation of Euclid's Optics» (cf. bibliografía).

Del *Liber de Visu* (Theisen 24):



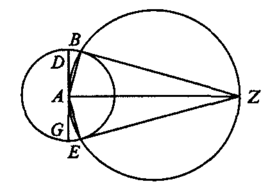
Si se coloca una circunferencia en el mismo plano en que está el ojo no se ve la semicircunferencia entera.

Si BZG fuera un semicírculo, puesto que B y DG serían rectas tangentes al círculo, una y otra formarían un ángulo recto con el diámetro BG, según el 17 del Tercero de Euclides.

Luego el triángulo BDG tendrá dos ángulos rectos, lo cual es imposible.

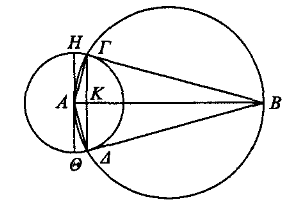
Del *Liber de Visu* (Theisen 25):

El rayo más largo que llega a una esfera será como una recta tangente.



Sea DG una esfera vista por el ojo Z con centro ⟨en A⟩ y a distancia del ojo; prolongada una recta desde el centro de la esfera hasta el ojo, dibújese un círculo, y sea la recta AZ el diámetro del círculo y avancen los rayos ZE, ZB a los puntos de corte de los círculos. Digo que éstos son más largos que los que no son tangentes a la esfera.

Sea una esfera cuyo centro sea A y sea B el ojo. Y trácese AB y prolónguese el plano que pasa por BA. Producirá como corte un círculo[22]. Produzca el círculo ΓΔΘΗ y, en torno al diámetro AB, dibújese el círculo ΓΒΔ y trácense las rectas ΓΒ, ΒΔ, ΑΔ, ΑΓ. Puesto que ΑΓΒ es un semicírculo, el ángulo correspondiente a ΑΓΒ es recto, e igualmente el correspondiente a ΒΔΑ. Por tanto, ΓΒ, ΒΔ se tocan. Únase ΓΔ y trácese ΗΘ paralela a ΓΔ por el punto A. Entonces, los ángulos con vértice K son rectos. Y si haciendo girar el triángulo ΒΓΚ en torno al ángulo recto K, mientras AB permanece fija, se le lleva de nuevo a la misma posición en la que empezó a moverse, ΒΓ tocará a la esfera en un punto y ΚΓ producirá como corte un círculo.



Por tanto, en la esfera se verá una circunferencia de un círculo.

Así, prolónguense los radios de la esfera hasta los extremos de los rayos tangentes y formen dos ángulos rectos con los rayos aplicados. Así, cada uno de los ángulos está inscrito en un semicírculo. Luego las rectas aplicadas a la circunferencia serán tangentes a ella puesto que forman ángulos rectos con las líneas trazadas desde el centro. Luego, prolongadas, no serán secantes al círculo. Pues si cayeran dentro, sería contra la cola del pavo. Pero si estuviera fuera, puesto que las dos, etcétera. Luego si llegara un rayo más largo ocurriría que dos líneas rectas comprenderían una superficie, lo cual es imposible.

Luego queda que las dos rectas más largas son tangentes.

Respecto al texto de esta segunda demostración hay que señalar que la frase «Pues si cayera dentro sería contra la cola del pavo» aparece en el manuscrito más fiable sólo como glosa marginal.

[22] VER EECKE anota que en los *Elementos* no aparece ninguna proposición en la que se demuestre que la sección de la esfera es un círculo, aunque tal demostración se nos ofrece, subsidiariamente, en XII 17. La demostración particular, indica, no la encontraremos hasta las *Esféricas* de TEODOSIO (algo anteriores al final del siglo I d. C.).

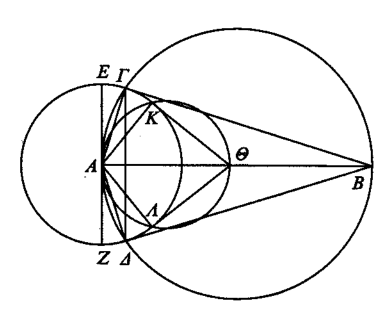
Digo además que será menor que la semiesfera.

Puesto que HΘ es un semicírculo, ΓΔ es menor que un semicírculo. Y mediante los rayos BΓ, BΔ se ve la misma parte de la esfera. Por tanto ΓΔ es menor que una semiesfera. Y se ve mediante los rayos BΓ, BΔ.

Proposición 24

Al acercarse el ojo a la esfera, lo que se ve será menor, pero parecerá que se ve mayor.

Sea una esfera cuyo centro sea A y sea B el ojo a partir del cual se trace la recta AB. Y circunscríbase en torno a AB el círculo ΓBΔ, y trácese desde el punto A la recta EZ formando ángulos rectos por ambos lados con la recta AB, y prolónguese el plano que pasa por EZ, AB. Producirá como corte un círculo. Sea ΓEZΔ, y trácense ΓA, AΔ, ΔB, BΓ, ΓΔ. Como en el teorema previo, los ángulos con vértice en los puntos Γ, Δ son rectos. Por tanto, BΓ, BΔ, que son rayos, se tocan y bajo el ojo B se ve la parte ΓΔ de la esfera.



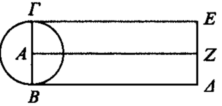
Cambie de posición el ojo más cerca de la esfera y sea Θ, y a partir de él trácese la recta ΘA y dibújese el círculo AΛK y trácense las rectas ΘK, KA, AΛ, ΛΘ. De manera semejante, bajo el ojo Θ se ve la parte KΛ de la esfera, mientras que bajo B se veía ΓΔ. Y KΛ es menor que ΓΔ.

Luego, al acercarse el ojo, lo que se ve es menor, pero da la impresión de que parece mayor, porque el ángulo correspondiente a ΚΘΑ es mayor que el ángulo correspondiente a ΓΒΔ [Def. 4].

Proposición 25

Vista una esfera mediante dos ojos, se verá su semiesfera íntegra si el diámetro de la esfera es igual a la recta que distan los ojos entre sí.

Sea una esfera cuyo centro sea A y dibújese en la esfera en torno al centro A el círculo ΒΓ y trácese su diámetro ΒΓ y desde Β, Γ trácense ΒΔ, ΓΕ formando ángulos rectos[23] y sea paralela a ΒΓ la recta ΔΕ, sobre la cual yazgan los ojos Δ, Ε.



Digo que se verá la semiesfera íntegra.

Por el punto A trácese AZ paralela a cada una de las rectas ΒΔ, ΓΕ. Entonces ΑΒΔΖ es un paralelogramo. Si al hacerlo girar, permaneciendo fija ΑΖ, llega de nuevo a la misma posición desde la que empezó a moverse la figura que se ha hecho girar, empezará en Β, llegará a Γ y Β y la figura descrita por la recta ΑΒ será un círculo que pasa por el centro de la esfera.

Luego bajo los ojos Δ, Ε se verá una semiesfera.

[23] Formando ángulos rectos «con los extremos del diámetro del círculo», se entiende a partir de la figura.

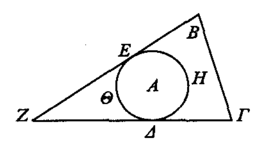
Proposición 26

Si la distancia entre los ojos es mayor que el diámetro de la esfera, se verá más de una semiesfera de la esfera.

Sea una esfera cuyo centro sea A y descríbase en torno al centro A el círculo EΘΔH, y sean los ojos B, Γ y sea la distancia entre los rayos visuales B, Γ mayor que el diámetro de la esfera y trácese BΓ.

Digo que se verá más de una semiesfera.

Incidan los rayos BE, ΓΔ y prolónguense hacia las partes E, Δ. LLegan a coincidir uno con otro por ser el diámetro menor que BΓ. Coincidan en el punto Z. Puesto que las rectas ZE, ZΔ han incidido en la circunferencia desde un punto exterior al círculo, ΔΘH es menor que un semicírculo [*Liber De Visu* (Theisen 24)]. Luego EHΔ es mayor que un semicírculo. Y EHΔ se ve bajo B, Γ. Por tanto, bajo B, Γ se ve más de la mitad del círculo.



Luego lo mismo se verá de la esfera.

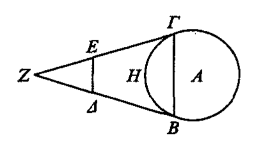
Proposición 27

Si la distancia entre los ojos es menor que el diámetro de la esfera, se verá menos de una semiesfera.

Sea una esfera cuyo centro sea el punto A y descríbase en torno al punto A el círculo BΓ y quede entre los ojos la

distancia ΔE que sea menor que el diámetro de la esfera, a partir del cual trácense las tangentes ΔB, EΓ y sean ellas mismas también rayos. Digo que se verá menos de una semiesfera.

Prolónguense BΔ, ΓE; irán a coincidir en la parte de Γ, B, H, puesto que ΔE es menor que el diámetro de la esfera. Coincidan en el punto Z. Puesto que las rectas ZB, ZΓ han incidido desde un punto Z, BHΓ será menor que un semicírculo [*Liber De Visu* (Theisen 24)]; pero lo que ocupa el segmento BHΓ, lo ocupa también el de la esfera.

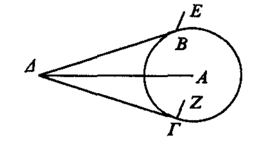


Por tanto, contienen menos de una semiesfera.

PROPOSICIÓN 28

Un cilindro visto de cualquier manera por un ojo se verá menos de un semicilindro.

Sea un cilindro del que el punto A sea el centro de la base y descríbase en torno a A el círculo BΓ y esté situado el ojo Δ situado en el mismo plano que la base BΓ del cilindro y únase la recta ΔA desde Δ hasta A y trácense desde Δ los rayos ΔB, ΔΓ y sean tangentes al círculo y álcense los lados del cilindro BE, ΓZ desde los puntos B, Γ formando ángulos rectos y prolónguense el plano que pasa por ΔB, BE y el que pasa por ΔΓ, ΓZ. Ninguno de los dos, por tanto, corta al cilindro, ya que ΔB, ΔΓ y BE, ΓZ son tangentes. Así, BΓ se ve mediante los rayos BΔ, ΔΓ, lo cual es menor que un semicírculo [*Liber De Visu* (Theisen 24)].

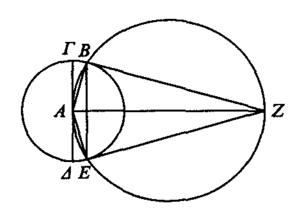


De la misma manera, también se verá menos de un semicilindro[24].

Y si se viera mediante dos ojos es evidente que ocurrirá también en este caso lo dicho en el caso de la esfera.

De otra manera

Sea un círculo cuyo centro sea A y sea Z un punto exterior[25] y únase AZ desde A hasta Z y desde el punto A álcese ΓΔ formando ángulos rectos con AZ por ambas partes. Luego ΓΔ es el diámetro del círculo. Y descríbase en torno a la recta AZ el círculo ABZE y trácense AB, BZ, ZE, EA. Luego ZB, ZE son tangentes, puesto que los ángulos con vértice en los puntos B, E son rectos[26]. Así, puesto que los rayos BZ, ZE han incidido desde un punto Z en la circunferencia del círculo, entonces se verá la parte BE del círculo. Y ΓBEΔ es un semicírculo.



Luego BE es menor que un semicírculo.

Este teorema es para los conos y para los cilindros, pues si desde los puntos B, E se trazan formando ángulos rectos los lados de los cilindros, los rayos serán tangentes a ellos por la parte por la que inciden y quedará cerrada la parte

---

[24] Heiberg objeta la contradicción entre el enunciado «visto de cualquier manera» y el desarrollo de la demostración, con el ojo situado «en el mismo plano que la base BΓ del cilindro»; Ver Eecke, sin embargo, no da importancia a la contradicción y aduce que la demostración sería la misma si consideráramos el ojo situado en un plano paralelo a la base del cilindro.

[25] En el que debemos situar el ojo.

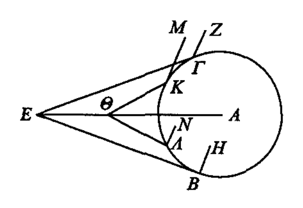
[26] Se refiere a los ángulos ZBA y ZEA (*Elem.* III 18).

BΔE de la vista, y se verá la parte BE del semicírculo. Y se verá esa misma parte de los conos, la menor [27].

PROPOSICIÓN 29

Al poner el ojo más cerca del cilindro, la parte del cilindro comprendida por los rayos es menor, pero parecerá que se ve mayor.

Sea un cilindro cuya base sea el círculo BΓ, su centro A y E el ojo desde el cual se trace EA hasta el centro e incidan los rayos EB, EΓ y desde los puntos B, Γ trácense ΓZ, BH formando ángulos rectos con el cilindro [28]. Por lo anterior, HBΓZ es menor que un semicilindro. Y se ve mediante el ojo E.



Cambie de posición el ojo Θ a más cerca.

Digo que lo comprendido por el ojo Θ da la impresión de parecer mayor que ZBΓH, siendo menor que ello.

Incidan los rayos ΘK, ΘΛ y trácense formando ángulos rectos desde los puntos K, Λ los lados del cilindro KM, ΛN. Mediante los rayos ΘK, ΘΛ se verá la parte MKΛN del cilindro. Pero también ZΓBH se ve mediante EB, EΓ; y ZΓBH es mayor que MKΛN. Pero da la impresión de parecer menor,

---

[27] Esta demostración es la que presenta la *Opticorum recensio* de Teón. En ambas versiones ha desaparecido la consideración de que el ojo debe estar situado en el mismo plano que la base. Cf. prop. 27 y n. El último párrafo es probablemente un añadido tardío.

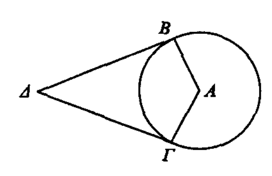
[28] Es decir, o bien con el plano de la base del cilindro, si suponemos el ojo situado en ella, o bien con el plano determinado por los rayos visuales que inciden en el cilindro.

puesto que también el ángulo correspondiente a Θ es mayor que el de E [Def. 4].

Proposición 30

Visto mediante un ojo un cono que tiene un círculo como base y el eje formando ángulos rectos con ella se verá menor que un semicono.

Sea un cono cuya base es el círculo ΒΓ y su vértice el punto Α y sea Δ el ojo desde el cual incidan los rayos ΔΒ, ΔΓ.



Y puesto que los rayos ΔΒ, ΔΓ han incidido tangentes a ΒΓ, entonces ΒΓ es menor que un semicírculo por lo demostrado anteriormente [*Liber De Visu* (Theisen 24)]. Trácense desde el vértice Α del cono hacia los puntos Β, Γ los lados del cono ΑΒ, ΑΓ. Luego lo comprendido por las rectas ΑΒ, ΑΓ y el sector ΒΓ es menor que un semicono, puesto que también ΒΓ es menor que un semicírculo.

Por tanto se verá menor que un semicono.

Proposición 31

Al colocar el ojo más cerca en el mismo plano en el que está la base del cono, la parte comprendida por los rayos visuales será menor, pero dará la impresión de que se ve mayor.

Sea un cono cuya base sea el círculo ΑΒ y su vértice el punto Γ y sea Δ el ojo y tómese el centro del círculo Λ, y trá-

cese la recta ΔΛ e incidan los rayos ΔA, ΔB y trácense los lados AΓ, ΓB del cono. Así, la parte ABΓ del cono queda comprendida por el ojo Δ y los rayos visuales ΔA, ΔB y es menor que un semicono.

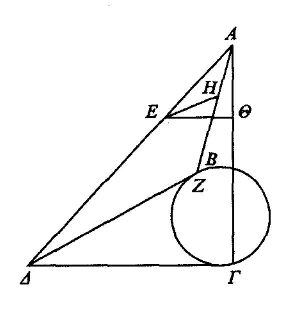
Cambie de posición el ojo a más cerca y sea E, e incidan los rayos EZ, EH y trácense los lados ZΓ, ΓH. De nuevo, queda comprendida la parte ZΓH del cono por el ojo E y los rayos visuales EZ, EH. Y ZΓH es menor que ABΓ, pero da la impresión de que parece mayor, puesto que el ángulo correspondiente a ZEH es mayor que el ángulo correspondiente a AΔB.

Y es evidente que también en el caso de un cono visto por dos ojos ocurrirá lo que ocurría en el caso de la esfera y el cilindro vistos de la misma manera.

Proposición 32

Si inciden rayos desde el ojo hacia la base del cono y desde los rayos incidentes y tangentes, desde sus puntos de contacto, se trazan rectas por la superficie del cono hacia su vértice y desde las rectas trazadas y los rayos que inciden desde el ojo hacia la base del cono se prolongan planos; si se pone el ojo en su contacto, es decir, en la sección común de los planos, lo que se ve del cono en total se verá igual mientras el rayo visual esté en un plano paralelo al plano presupuesto.

Sea un cono cuya base es el círculo BΓ y su vértice el punto A y sea Δ el ojo desde el que incidan los rayos ΔZ, ΔΓ y trácense desde los puntos de contacto Z, Γ hacia el vértice



A del cono los lados ZA, ΓA del cono y prolónguese el plano que pasa por ΔZ, ZA y el que pasa por ΓΔ, ΓA. Producirá como corte común una recta. Sea la recta AEΔ. Digo que si el ojo se transporta sobre AEΔ se verá del cono lo mismo que se veía mediante los rayos ΔΓ, ΔZ.

Esté situado sobre AEΔ el ojo E desde el cual incidan rayos hacia el cono. Irán por AZ, AΓ, puesto que el ojo está situado sobre un plano paralelo y los rayos visuales se mueven en líneas rectas. Pues si cayeran fuera de AΓ, AZ, los rayos visuales serán quebrados, lo cual es imposible. Sean pues EΘ, EH. Puesto que los rayos visuales se mueven en líneas rectas sobre un plano paralelo y que las cosas vistas bajo ángulos iguales parecen iguales, cuantos rayos visuales paralelos se pongan sobre la recta AEΔ contienen ángulos iguales, luego se verá lo mismo del cono [Def. 4] [si ven lo mismo; pero ven una parte menor del cono; luego se verá también una parte menor del cono][29].

Proposición 33

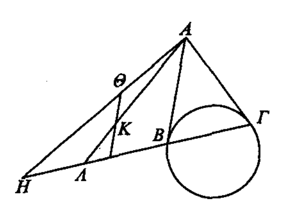
De nuevo, si el ojo cambia de posición desde un plano más bajo, colocado el ojo más alto lo que se ve del cono será mayor, pero dará la impresión de que parece menor, mientras que estando más bajo será menor, pero dará la impresión de que parece mayor.

---

[29] Heiberg considera sospechoso el pasaje entre corchetes, que, como puede verse, resulta contradictorio con el enunciado de la proposición y carece de nexo con lo inmediatamente anterior.

Sea un cono cuya base sea el círculo BΓ y su vértice el punto A, y sean los lados del cono BA, AΓ. Trácese BΓ y añádase BH a BΓ y trácese por un punto Θ al azar la recta ΘK paralela a AB.

Digo que, si se pone el ojo en el punto Θ, lo que se ve del cono será mayor, pero se verá menor que si se pone en el punto K.



Trácense AK, AΘ y prolónguense AΘ hacia H y AK hacia Λ. Así, al poner el ojo en H y en Λ será distinto lo que se ve del cono, y será mayor lo que se ve desde el ángulo de H, pero se verá mayor lo que se ve desde el ángulo de Λ a pesar de ser menor. Y lo que se ve desde el ángulo de H es igual que lo que se ve desde el ángulo de Θ y lo que se ve desde el ángulo de Λ, igual a lo que se ve desde el ángulo de K, como se demostró en la proposición anterior.

Luego lo que se ve del cono será mayor si se pone el ojo en Θ que si se pone en K, pero dará la impresión de que es menor.

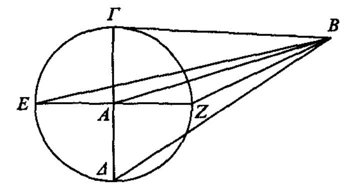
Proposición 34

Si desde el centro de un círculo se alza una recta formando ángulos rectos con el plano del círculo y se coloca el ojo sobre ella, los diámetros trazados en el plano del círculo parecerán todos iguales.

Sea un círculo cuyo centro sea el punto A y desde él, formando ángulos rectos con el plano del círculo, álcese una recta AB, sobre la cual esté situado el ojo B.

Digo que los diámetros parecerán iguales.

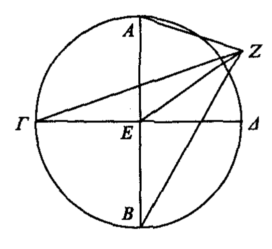
Sean ΓΔ, EZ dos diámetros y trácense BΓ, BE, BΔ, BZ. Puesto que ZA es igual a AΓ y AB es común y los ángulos son rectos, entonces la base ZB y la base BΓ son iguales y también los ángulos que están junto a las bases. Por tanto, el ángulo comprendido por ZB, BA es igual al comprendido por AB, BΓ. E igualmente también el correspondiente a EBA y el correspondiente a ABΔ. Luego el comprendido por ΓB, BΔ es igual al comprendido por EB, BZ. Y las cosas vistas bajo ángulos *iguales parecen iguales* [Def. 4]; luego ΓΔ parece igual a EZ.



***

Y *si la recta trazada desde el centro no formara ángulos rectos con el plano pero fuera igual al radio, los diámetros parecerán todos iguales.*

Sea el círculo ABΓΔ y trácense en él dos diámetros AB, ΓΔ y sea ZE, sobre la que está situado el ojo Z, la recta trazada desde el punto E sin formar ángulos rectos, pero igual a cada uno de los radios, y trácense los rayos ZA, ZΓ, ZB, ZΔ. Puesto que BE es igual a EZ y también EA es igual a EZ, entonces las tres rectas EZ, EA, EB son iguales. Luego el semicírculo descrito en torno al diámetro AB en el plano que pasa por AB, EZ pasará por el punto Z. Luego el ángulo comprendido por AZ, ZB es recto. Y es igualmente recto el comprendido por ΓZ, ZΔ. Y los ángulos rectos son iguales y los objetos vistos bajo ángulos iguales parecen iguales. Luego AB parecerá igual a ΓΔ.

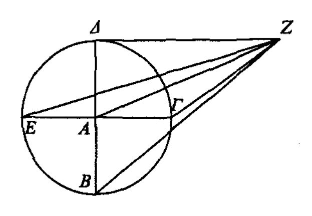


***

Y ahora ni sea igual AZ al radio ni forme ángulos rectos con el plano del círculo, pero haga iguales los ángulos correspondientes a ΔAZ, ZAΓ y los correspondientes a EAZ, ZAB.

Digo que también así parecerán iguales los diámetros que forman ángulos iguales.

Puesto que las rectas ΓA, AZ son iguales a ZA, AΔ y las rectas BA, AZ iguales a ZA, AE, entonces también son iguales los ángulos; luego la base ΔZ es igual a la base ZΓ. De manera que también el ángulo correspondiente a ΔZA es igual al correspondiente a AZΓ. De la misma manera demostraremos que el ángulo correspondiente a EZA es igual al correspondiente a AZB. Luego el ángulo entero correspondiente a ΔZB es igual al correspondiente a EZΓ; de manera que también los diámetros ΔB, EΓ parecerán iguales [Def. 4].



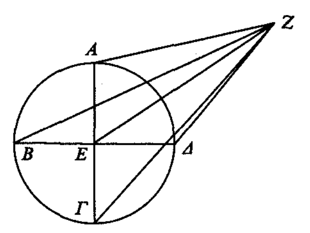
Proposición 35

Si el rayo que incide desde el ojo hacia el centro del círculo ni formara ángulos rectos con el plano del círculo ni fuera igual al radio ni comprendiera ángulos iguales[30]*, los diámetros con los que forma ángulos desiguales parecerán desiguales.*

Sea el círculo ABΓΔ y trácense los dos diámetros AB, ΓΔ que se cortan mutuamente formando ángulos rectos en el punto E; y la línea ZE, trazada desde el punto E, sobre la cual

[30] Sobreentiéndase «con los diámetros».

está situado el ojo, no forme ángulos rectos con el plano ni sea igual al radio ni contenga con las rectas ΑΓ, ΔΒ ángulos iguales.



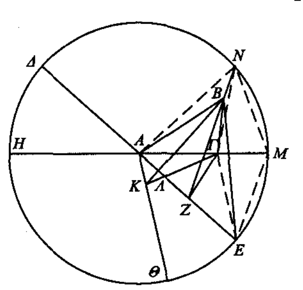
Digo que los diámetros ΑΓ, ΔΒ se verán desiguales.

Trácense ΖΓ, ΖΑ, ΖΔ, ΖΒ. Efectivamente, ΕΖ es mayor que el radio o menor; por eso, efectivamente, el ángulo comprendido por ΔΖ, ΖΒ es mayor que el comprendido por ΓΖ, ΖΑ o el comprendido por ΓΖ, ΖΑ mayor que el comprendido por ΔΖ, ΖΒ, como a continuación demostraremos.

Luego los diámetros se verán desiguales.

Lema

Sea un círculo cuyo centro sea el punto Α y sea Β el ojo desde el cual, trazada la perpendicular al círculo, no caiga en el centro Α, sino fuera, y sea ΒΓ y trácese ΑΓ desde Α hasta Γ y ΑΒ desde Α hasta Β.



Digo que de todos los ángulos comprendidos por las rectas trazadas por el punto Α y que forman un ángulo con la recta ΑΒ el menor es el comprendido por ΓΑ, ΑΒ.

Trácese por Α la recta ΔΑΕ. Digo que el ángulo correspondiente a ΓΑΒ es menor que el correspondiente a ΕΑΒ.

Trácese desde Γ hasta ΔΕ la perpendicular ΓΖ en el plano, y trácese ΒΖ. Luego también ΒΖ es perpendicular a ΔΕ. Puesto que el ángulo correspondiente a ΓΖΑ es recto, el co-

rrespondiente a AΓZ es menor que un recto. Y al ángulo mayor lo subtiende el lado mayor. Luego AΓ es mayor que AZ. Pero el ángulo comprendido por AΓ, ΓB y el comprendido por BZ, ZA son rectos. De modo que las rectas ΓB, BZ son desiguales. Y el ángulo comprendido por ZA, AB es mayor que el comprendido por ΓA, AB. De manera semejante se demostrará que de todos los ángulos comprendidos por las rectas trazadas por el punto A y que forman un ángulo con la recta AB el menor es el comprendido por ΓA, AB.

Y es evidente que si se traza cualquier otra recta por el punto A, como AΘ, que esté más lejos de AΓ que AZ, el ángulo correspondiente a BAΘ será mayor que el correspondiente a BAZ.

Pues, de nuevo, al trazar ΓK perpendicular a AΘ, una vez trazada BK será igualmente perpendicular a AΘ; y puesto que AΛ es mayor que AK (pues subtiende al ángulo recto AKΛ), entonces AZ es mucho mayor que AK. Y los ángulos correspondientes a BZA, BKA son rectos; luego BZ es menor que BK por ser la suma de los cuadrados de BZ, ZA y los de BK, KA iguales al cuadrado de BA y entre sí y, a la vez, ser mayor el ángulo correspondiente a BAK que el correspondiente a BAZ. Y de todos los ángulos formados por la recta BA y las rectas que pasan por el punto A el mayor es el correspondiente a BAH una vez prolongada ΓA hacia H, puesto que también el menor de todos es el correspondiente a BAΓ.

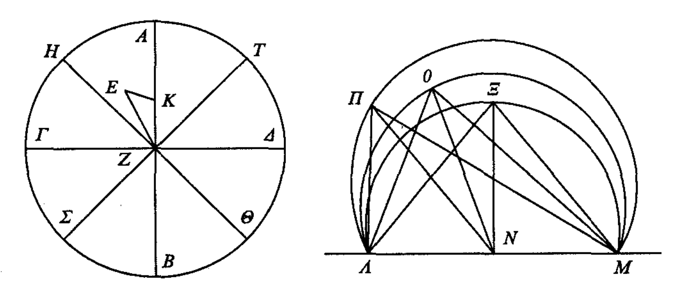
Por otro lado, son iguales las rectas que por cada lado distan lo mismo de MA, la que contiene, junto con BA, el ángulo menor. Pues sea MN igual a EM y trácense EM, MN, EΓ, ΓN, BE, BN, AN. Puesto que MN es igual a ME y MΓ es común y contienen ángulos iguales, entonces EΓ es igual a ΓN. Y ΓB es común y forma ángulos rectos[31]. Luego también EB es

[31] «Con ΓN y con ΓE», se entiende.

igual a BN. Pero también EA es igual a AN, y AB es común. Luego también el ángulo correspondiente a EAB es igual al correspondiente a NAB.

***

Sea el círculo ABΓΔ, cuyo centro sea Z, en el cual se tracen rectas que pasen por A, B, Γ, Δ que se corten mutuamente formando ángulos rectos, y sea el ojo E, desde el cual la recta que lo une con el centro formando ángulos rectos con ΓΔ contenga junto con AB un ángulo cualquiera. Y sea EZ mayor que el radio.



Digo que los diámetros AB, ΓΔ parecerán desiguales y que ΓΔ parecerá el mayor y AB el menor, y que siempre el más cercano al menor parecerá menor que el más lejano, y que sólo dos diámetros parecerán iguales: los que, por cada lado, distan lo mismo de la menor.

Puesto que ΓΔ forma ángulos rectos con cada una de las rectas AB, EZ, entonces también todos los planos que pasan por ΓΔ, al ser prolongados, forman ángulos rectos con el plano que pasa por EZ, AB. De manera que también el supuesto plano del círculo, en el que está ΓΔ[32]. Trácese, pues, desde el punto E una perpendicular al plano supuesto. Por

[32] Sobreentiéndase «cumple esa condición».

tanto, cae sobre AB, la sección común de los planos. Caiga, pues, y sea EK, y trácese ΛM igual al diámetro del círculo y divídase en dos partes iguales por el punto N, y trácese desde N la recta NΞ formando ángulos rectos con ΛM, y sea NΞ igual a EZ. Entonces el segmento descrito en torno a ΛM y que pasa por Ξ es mayor que un semicírculo, puesto que NΞ es mayor que cada una de las rectas ΛN, NM. Sea el sector ΛΞM y trácense ΞΛ, ΞM. Entonces el ángulo con vértice en Ξ comprendido por las rectas ΛΞ, ΞM es igual al ángulo con vértice en E comprendido por el punto E y los puntos Γ, Δ. Constitúyase en la recta ΛN y en su punto N el ángulo comprendido por ΛN, NO igual al comprendido por HZ, ZE [*Elem.* I 23], y sea igual NO a EZ y trácense ΛO, OM y descríbase en torno al triángulo ΛOM el sector ΛOM. El ángulo con vértice en O será igual al ángulo con vértice en E correspondiente a HEΘ. Constitúyase además en la recta ΛN y en su punto N el ángulo comprendido por ΛN, NΠ igual al correspondiente a AZE [*Elem.* I 23] y sea igual NΠ a EZ, y trácense ΛΠ, ΠM y descríbase en torno al triángulo ΛΠM el sector de círculo ΛΠM. Entonces el ángulo con vértice en Π será igual al ángulo correspondiente a AEB. Así, puesto que el ángulo con vértice en Ξ es mayor que el ángulo con vértice en O, mientras que el de vértice en Ξ es igual al correspondiente a ΓEΔ y el de vértice en O es igual al correspondiente a HEΘ, entonces ΓΔ parecerá mayor que HΘ. Y, a la vez, puesto que el ángulo con vértice en el punto O es igual al correspondiente a HEΘ, mientras que el de vértice en Π es igual al correspondiente a AEB, pero el de vértice en O es mayor que el de vértice en Π, entonces también será mayor el correspondiente a HEΘ que el correspondiente a AEB. Luego HΘ parecerá mayor que AB. Luego de todas las rectas que pasan por el punto Z y forman ángulos con la recta EZ se verá ΓΔ la mayor y AB la menor, porque también de los ángulos cons-

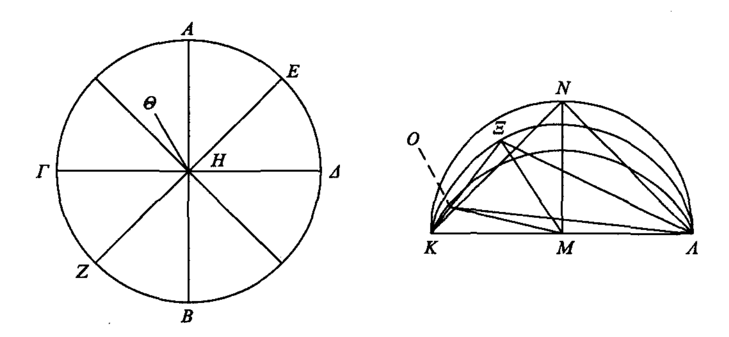
tituidos con vértice en E el mayor es el correspondiente a ΓΕΔ y el menor el correspondiente a AEB, y sólo se podrá constituir otro ángulo igual a ΗΕΘ: el correspondiente a ΤΕΣ, al quitar AT igual a HA y trazar TZ y prolongarla hacia Σ. Eso está claro a partir de los ángulos de los puntos Ξ, Ο, Π. Y de éstos el menor es el de vértice en Π, puesto que el ángulo correspondiente a ΠΝΛ es igual al ángulo menor, el correspondiente a EZA; y el mayor es el de vértice en Ξ por formar ángulos rectos con ΝΞ, que es la mayor de las rectas trazadas por el punto N en el segmento ΛΞΜ y porque al poner una igual a ella excede el segmento ΛΞΜ y porque el punto Ξ es el que cae más dentro mientras que Π el que cae más fuera por no existir ningún ángulo menor que el correspondiente a ΠΝΛ. Por otro lado, al ser igual el ángulo correspondiente a EZT al correspondiente a EZH, como se ha demostrado antes, también su suplementario, el correspondiente a ΕΖΣ, es igual al correspondiente a ΕΖΘ, es decir, al correspondiente a ONM. De modo que cada uno de los ángulos correspondientes a ΤΕΣ, ΗΕΘ son iguales al de vértice en O.

Luego ΗΘ parecerá igual que ΤΣ.

***

Sea menor la recta trazada del ojo al centro que el radio. En ese caso sucederá lo contrario en relación con los diámetros: el que antes parecía mayor ahora parecerá menor; y el menor, mayor.

Sea un círculo ΑΒΓΔ y trácense dos diámetros AB, ΓΔ que se cortan mutuamente en ángulos rectos, y trácese otra línea al azar EZ y sea Θ el ojo a partir del cual la línea trazada hasta el centro, ΗΘ, sea menor que cada uno de los radios. Y sea ΚΛ igual al diámetro del círculo y córtese en dos

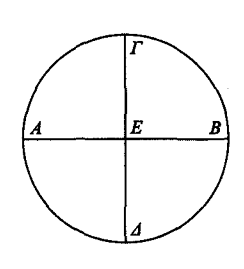


partes iguales por el punto M, y desde el punto M trácese MN en ángulos rectos y sea MN igual a ΘH y descríbase el sector de círculo NKΛ en torno a KΛ y el punto N. Ciertamente, es menor que un semicírculo, puesto que MN es menor que el radio. Y con vértice en N habrá un ángulo comprendido por KN, ΛN igual al ángulo con vértice en Θ comprendido por ΓΘ, ΘΔ. Y además, sea el ángulo correspondiente a KMΞ igual al correspondiente a EHΘ, y sea MΞ igual a HΘ y descríbase en torno a KΛ y al punto Ξ el sector KΞΛ. Entonces el ángulo con vértice en el punto Ξ comprendido por KΞΛ es igual al de vértice en Θ comprendido por ZΘE. Y además, sea el comprendido por KM, MO igual al comprendido por AH, HΘ y sea MO igual a HΘ, y descríbase un sector en torno a KΛ y al punto O. En consecuencia, el ángulo de vértice en O comprendido por KOΛ será igual al de vértice en Θ comprendido por AΘB. Puesto que el ángulo de vértice en O es mayor que el de vértice en Ξ, mientras que el ángulo de vértice en O es igual al ángulo de Θ comprendido por AΘB y el de vértice en Ξ es igual al de vértice en Θ comprendido por EΘZ, entonces AB parecerá mayor que EZ. A la vez, puesto que el de vértice en Θ comprendido por EΘ, ΘZ es mayor que el de vértice en Θ comprendido por ΓΘΔ, entonces EZ se verá mayor que ΓΔ.

Proposición 36

Las ruedas de los carros parecen unas veces circulares, y otras, oblongas.

Sea ΑΒΓΔ una rueda y trácense los diámetros ΒΑ, ΓΔ que se cortan mutuamente formando ángulos rectos en el punto Ε y no esté el ojo en el plano del círculo.



Por tanto, si la recta trazada del ojo hacia el centro formara ángulos rectos con el plano o fuera igual al radio, los diámetros parecerán todos iguales, de modo que la rueda parece circular.

Pero si la línea trazada desde el ojo hacia el centro no formara ángulos rectos con el plano ni fuera igual al radio, los diámetros parecerán desiguales, uno muy grande y otro muy pequeño, y sólo un diámetro, trazado hacia ambas partes, se verá igual a cualquier otro trazado intermedio entre el mayor y el menor. De modo que la rueda parece oblonga.

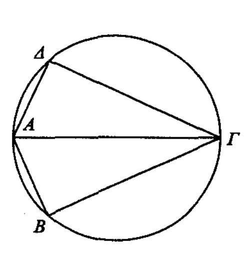
Proposición 37

Hay un lugar en el cual, si el ojo permanece fijo y el objeto visto cambia de posición, el objeto visto parece siempre igual.

Sea Α el ojo y ΒΓ la magnitud vista y a partir del ojo incidan los rayos ΑΒ, ΒΓ y descríbase en torno a ΑΒΓ el círculo ΑΒΓ.

Digo que hay un lugar en el cual si el ojo permanece fijo y la magnitud vista cambia de posición, el objeto visto parece siempre igual.

Cambie de posición y sea ΔΓ, y sea AΔ igual a AB. Así, puesto que BA es igual a AΔ y BΓ igual a ΓΔ, entonces el ángulo BAΓ es igual al ángulo ΔAΓ; pues están sobre arcos de circunferencia iguales; de manera que son iguales. Luego el objeto visto parecerá igual [Def. 4].

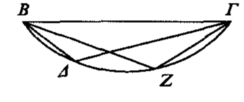


Lo mismo sucederá si el ojo permaneciera en el centro del círculo y el objeto visto se moviera sobre la circunferencia.

Proposición 38

Hay un lugar en el cual, si el ojo cambia de posición y el objeto visto permanece fijo, el objeto visto parece siempre igual.

Sea BΓ el objeto visto y sea Z el ojo a partir del cual incidan los rayos ZB, ZΓ y descríbase en torno al triángulo BZΓ un sector de círculo, BZΓ, y cambie de posición el ojo Z hacia Δ e incidan ahora en cambio los rayos ΔB, ΔΓ. Por consiguiente, el ángulo Δ es igual a Z, puesto que ocupan el mismo segmento. Y los objetos vistos bajo ángulos iguales parecen iguales [Def. 4].

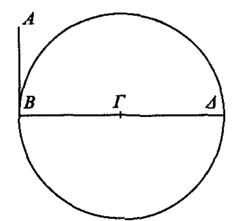


Luego, en cualquier caso, BΓ parecerá igual si el ojo cambia de posición sobre el arco de circunferencia BΔΓ.

Proposición 39

Si una magnitud fuera perpendicular al plano supuesto y se pusiera el ojo sobre un punto del plano y el objeto visto cambia de posición sobre la circunferencia del círculo que tiene por centro el ojo, el objeto visto se verá siempre igual al moverse en posición paralela a la del principio.

Sea AB la magnitud vista que es perpendicular al plano y sea Γ el ojo. Y trácese ΓB y con centro en Γ y radio ΓB descríbase el círculo BΔ. Digo que si la magnitud AB cambia de posición sobre la circunferencia del círculo, desde el ojo Γ se verá igual AB.



Pues AB es una recta y forma con BΓ un ángulo recto, y todos los radios que inciden desde el centro Γ en la circunferencia del círculo forman ángulos iguales[33]. Luego la magnitud vista se verá igual.

Y si desde el centro Γ se trazara una recta perpendicular y se pusiera el ojo en ella y la magnitud vista fuera transportada por la circunferencia del círculo en posición paralela a la recta sobre la que está el ojo, el objeto visto se verá siempre igual.

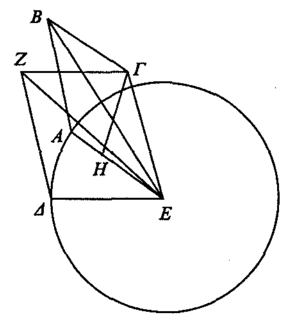
---

[33] Se entiende que todas esas rectas forman ángulos iguales «con la recta AB cuando ésta se desplaza sobre la circunferencia BΔ en posición paralela a la suya primitiva». Ver Eecke sugiere que podríamos encontrarnos ante un texto lacunoso y que en este punto debería añadirse que, por tanto, el ángulo AΓB permanecerá constante y que una magnitud vista bajo ese ángulo constante parecerá siempre igual.

Proposición 40

Y si el objeto visto no fuera perpendicular al plano supuesto y, siendo igual al radio, cambiara de posición sobre la circunferencia del círculo, al moverse en posición paralela a la del principio se verá unas veces igual a sí mismo y otras desigual.

Sea el círculo AΔ y tómese el punto Δ sobre su circunferencia y álcese la recta ΔZ que no forme ángulos rectos con el círculo y que sea igual al radio, y sea E el ojo.



Digo que ΔZ, si cambia de posición sobre la circunferencia del círculo, a veces parecerá igual, a veces mayor, a veces menor.

Efectivamente, trácese por el punto E, que es el centro, ΓE paralela a ΔZ y sea EΓ igual a ΔZ. Y trácese por el punto Γ la recta ΓH perpendicular al plano supuesto y únase con el plano en el punto H. Y, una vez trazada EH, prolónguese y únase con la circunferencia en el punto A y trácese AB paralela a ΓE por el punto A, y sea AB igual a ΔZ.

Digo que de todas las rectas que cambian de posición sobre la circunferencia del círculo AB parecerá la menor.

Trácense las rectas EΔ, ΓZ, ΓB, EB, ZE. Puesto que ΓE *es* paralela e igual a AB, entonces también EA es igual y paralela a ΓB. Luego AEΓB es un paralelogramo; por lo mismo, también EΔZΓ es un paralelogramo. Queda demostrar que la misma magnitud parece menor y mayor. Y es evidente que

el ángulo correspondiente a ΓΕΑ es menor que el correspondiente a ΓΕΔ, puesto que se ha demostrado que de todas las rectas trazadas por el centro y que forman un ángulo[34], el ángulo menor es el correspondiente a ΓΕΑ [Lema que sigue a 35]. Luego también es menor que el correspondiente a ΓΕΔ. Y el ángulo correspondiente a ΒΕΑ es la mitad del correspondiente a ΓΕΑ, puesto que ΒΕ es un paralelogramo equilátero. Por otro lado, el ángulo correspondiente a ΖΕΔ es la mitad del correspondiente a ΓΕΔ, puesto que ΖΕ es un paralelogramo equilátero. Luego el ángulo correspondiente a ΒΕΑ es menor que el correspondiente a ΖΕΔ. De modo que también la magnitud ΑΒ se verá menor que la ΔΖ.

Y es evidente a partir del lema recién demostrado que se verá lo más pequeño en el punto Α, lo más grande en el punto diametralmente opuesto a Α e igual cuando dista igual del punto Α por cualquiera de los dos lados.

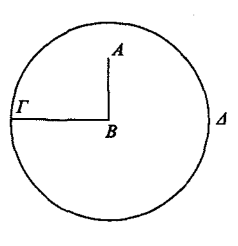
Proposición 41

Si el objeto visto formara ángulos rectos con el plano supuesto y el ojo cambiara de posición sobre la circunferencia de un círculo que tiene por centro el punto en el que se une la magnitud con el plano, el objeto visto parecerá siempre igual.

Sea ΑΒ la magnitud vista, que forma ángulos rectos con el plano supuesto, y sea Γ el ojo. Y con centro en Β y radio ΒΓ descríbase el círculo ΓΔ.

[34] Entiéndase «y que forman un ángulo con la recta que representa la magnitud vista que se traslada sobre la circunferencia».

Digo que si Γ cambia de posición sobre la circunferencia del círculo, AB parecerá siempre igual.



Esto es evidente. Pues todos los rayos que inciden desde el punto Γ sobre AB inciden con ángulos iguales, puesto que el ángulo de B es recto.

Luego el objeto visto se verá igual [Def. 4].

Proposición 42

Si el objeto visto permanece fijo y el ojo cambia de posición en una línea recta que es oblicua a la magnitud vista, el objeto visto parece a veces igual y a veces desigual.

Sea el objeto visto AB, [E el ojo] y la recta oblicua ΓΔ y prolónguese ΓA en línea recta con BA y únase con ΔΓ en Γ, y cambie de posición sobre ella el ojo.

Digo que AB parece a veces igual y a veces desigual.

Tómese ΓE, la media proporcional de BΓ, ΓA, y sea E el ojo y cambie de posición y esté sobre la misma recta en Δ. Digo que el objeto visto desde E, Δ parece desigual.

Trácense las rectas AE, EB, AΔ, BΔ y circunscríbase en torno al triángulo AEB el sector AEB y sea el ángulo comprendido por ΓA, AZ igual al ángulo comprendido por ΓΔ, ΔB[35] y trácese BZ. Entonces los puntos B, A, Z, Δ están en círculo. Puesto que el

[35] Ver Eecke indica que AZ se construye como antiparalela de ΔB respecto al ángulo con vértice en Γ. Dos rectas son antiparalelas respecto a una tercera cuando, sin ser paralelas, forman ángulos iguales con ella

ángulo correspondiente a AEB es mayor que el correspondiente a AZB mientras que el correspondiente a AZB es igual al comprendido por AΔ, ΔB, ya que están en el mismo segmento, entonces también el correspondiente a AEB es mayor que el correspondiente a AΔB. Pero AB se ve bajo el ángulo correspondiente a AΔB cuando el ojo está en Δ, mientras que el mismo AB se ve bajo el ángulo correspondiente a AEB cuando el ojo está en E. Por tanto el objeto visto parece desigual al cambiar de posición el ojo sobre la recta EΔ [Def. 4].

Y es evidente que también al cambiar el ojo de posición sobre EΓ parece desigual, lo más grande desde la posición E, siempre mayor en la posición más cercana a él[36] sobre cualquiera de las rectas EΔ, EΓ; igual en las posiciones Z y Δ y en las tomadas de la misma manera que éstas, por estar los ángulos en el mismo segmento.

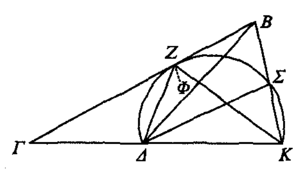
De otra manera

Sea KΔ el objeto visto, y BΓ la recta coincidente con KΔ al prolongar ésta. Tómese la recta ΓZ, media proporcional de ΓΔ, ΓK y trácense ZK y ZΔ, y descríbase en torno a la recta

(como en el caso de los lados iguales de un triángulo isósceles respecto a la base) y son antiparalelas respecto a un ángulo cuando ambas lo subtienden y forman ángulos iguales con las dos rectas que forman el ángulo. Las antiparalelas no aparecen descritas, usadas ni tratadas en los *Elementos*, si bien Heath en su comentario las emplea como recurso para ampliar la demostración de VI 12. A juzgar por el uso que se hace aquí de la antiparalela, parece que se conocían sus propiedades, aunque no exista para ella ninguna denominación específica (de hecho, la palabra griega *antiparállēlos* no se nos ha conservado en ningún texto de carácter matemático, sino sólo como término técnico de métrica).

[36] Es decir, «en la más cercana a E».

KΔ un segmento que comprenda el ángulo correspondiente a KZΔ. Será tangente a la recta BΓ, puesto que KΓ es a ΓZ como ΓZ a ΓΔ. Esté situado el ojo en el punto B y prolónguense ΔB, BK. Trácese ΣΔ. Así, el ángulo Φ es igual al ángulo Σ, puesto que ambos están en el mismo segmento. Y el ángulo Σ es mayor que el ángulo B, luego también el ángulo Φ es mayor que el ángulo B.

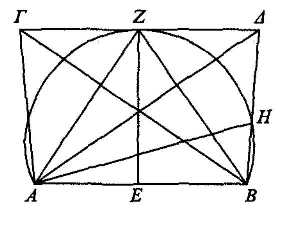


Luego KΔ parece mayor si el ojo está en Z que si está en B.

Proposición 43

Lo mismo sucederá si la línea recta[37] *fuera paralela a la magnitud vista.*

Sea AB la magnitud vista y córtese en dos partes iguales por el punto E y trácese desde E formando ángulos rectos con AB la recta EZ, sobre la cual esté situado el ojo Z, y trácense las rectas ZA, ZB y circunscríbase en torno al triángulo AZB el segmento AZB y trácese ZΔ paralela a AB por el punto Z y cambie el ojo de posición a Δ e incidan los rayos AΔ, ΔB.



Digo que desde Δ, Z parecerán desiguales.

Trácese AH. Puesto que el ángulo correspondiente a AZB es igual al correspondiente a AHB, mientras que el correspondiente a AHB es mayor que el correspondiente a AΔB, entonces también el correspondiente a AZB es mayor que el

[37] Se refiere a «la línea recta sobre la que se desplaza el ojo».

correspondiente a AΔB. Y si el ojo está en Z, AB se ve bajo el ángulo correspondiente a AZB, e, igualmente, si está en Δ, bajo el correspondiente a AΔB.

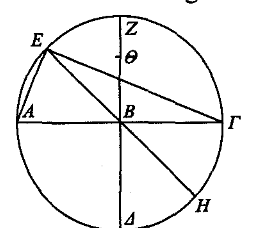
Luego el objeto visto parece desigual desde los puntos Δ, Z [Def. 4].

Y si se pone ZΓ igual a ΔZ, entonces desde Γ parece menor que desde Z, pero desde Γ, Δ parece igual.

Proposición 44

Hay lugares en los cuales, al cambiar el ojo de posición, las magnitudes iguales y que ocupan ciertos lugares en posición contigua[38] *parecen unas veces iguales y otras desiguales.*

Sea Θ el ojo y AB, BΓ las magnitudes y trácese BZ desde B formando ángulos rectos y prolónguese hacia Δ. Es evidente que si el ojo se pone en cualquier parte de ZΔ las magnitudes AB, BΓ parecerán iguales. Cambie de posición el ojo y sea E.



Digo que desde E parecen desiguales.

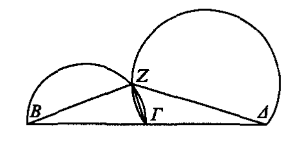
Incidan los rayos AE, EB, EΓ y circunscríbase en torno al triángulo AΓE el círculo AEΔΓ y sea BH la prolongación de EB. Así, puesto que el arco de circunferencia AΔ es igual al arco de circunferencia ΔΓ, mientras que el arco de circunferencia AΔH es mayor que el arco de circunferencia HΓ, entonces AB parecerá mayor que BΓ. Y si

[38] El texto griego emplea el término *koinôs;* literalmente traducido diríamos «que ocupan en común determinados lugares». Prefiero la versión más libre en beneficio de la claridad.

cambia de posición[39] sobre EH parecerán, del mismo modo, desiguales, y si se pone sobre las partes del círculo, a menos que sea en la recta que forma ángulos rectos, parecen desiguales, y si se pone fuera del círculo sin estar en línea recta con ΔZ, parecen desiguales.

De otra manera

Sea la recta BΓ igual a la recta ΓΔ, y descríbase en torno a BΓ el semicírculo BZΓ, y en torno a ΓΔ descríbase ΓZΔ, mayor que un semicírculo. Y es evidente que cortará[40] al semicírculo antes mencionado. Y[41] es posible describir sobre ΓΔ una sección mayor que un semicírculo.



Pues si suponemos un ángulo agudo, nos es posible describir sobre ΓΔ un segmento de círculo que admita un ángulo igual al ángulo agudo supuesto, según el teorema 33 del libro tercero de los planos, y el segmento que se forme sobre este ángulo será mayor que un semicírculo, según el teorema 31 del libro tercero de los planos. Y trácense BZ, ZΓ, ZΔ. Así, el ángulo inscrito en el semicírculo es mayor que el ángulo inscrito en el segmento mayor. Y los objetos vistos bajo un ángulo mayor parecen mayores [Def. 4]. Luego BΓ parece mayor que ΓΔ. Y era igual. Luego hay un lugar co-

[39] Sobreentiéndase «el ojo».

[40] Sobreentiéndase como sujeto «el sector ΓZΔ».

[41] Desde este punto y hasta «el teorema 31 del libro tercero de los planos» da la impresión de ser una glosa marginal que se ha introducido en el texto. De hecho, la demostración puede seguirse perfectamente sin tales referencias a los *Elementos*. Esta opinión fue ya expresada por Weissenborn, pero Heiberg no la admite en su edición, sino que la relega al aparato crítico.

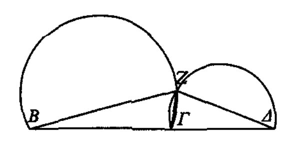
mún en el cual, si se pone el ojo, los objetos iguales parecen desiguales.

Pero parecerán iguales cuando estén en los † puntos del principio, de los que están en los <segmentos> BΓ, ΓΔ mayores que semicírculos[42].

Proposición 45

Existe un lugar común desde el cual las magnitudes desiguales parecen iguales.

Sea BΓ mayor que ΓΔ y descríbase en torno a BΓ un segmento mayor que un semicírculo, y en torno a ΓΔ una figura semejante a la descrita en torno a BΓ, es decir, que admita un ángulo igual al que hay en BZΓ. Entonces, las secciones se cortarán mutuamente. Córtense en Z y trácense ZB, ZΓ, ZΔ. Así, puesto que los ángulos que están inscritos en segmentos semejantes son iguales entre sí, los ángulos de las secciones BZΓ, ΓZΔ son iguales entre sí. Y los objetos vistos bajo ángulos iguales parecen iguales [Def. 4]. Luego al poner en el punto Z el ojo, BΓ parecería igual a ΓΔ; y es mayor.



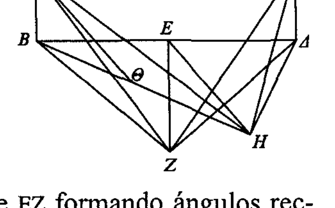
Luego hay un lugar común desde el cual las magnitudes desiguales parecen iguales.

[42] El texto corrupto de este último párrafo se refiere a la primera parte de la demostración contenida en 44, es decir, a los casos en que «las magnitudes iguales y que ocupan determinados lugares en posición contigua parecen iguales». Por el estado del texto no podemos discernir si ofrecía una demostración alternativa a la de 44 o si se limitaba a repetir la conclusión.

PROPOSICIÓN 46

Existen lugares en los cuales, al cambiar el ojo de sitio, las magnitudes iguales y que están formando ángulos rectos con el plano supuesto parecen a veces iguales y a veces desiguales.

Sean AB, ΓΔ magnitudes iguales que están formando ángulos rectos con el plano supuesto.



Digo que hay un lugar que, si se pone el ojo en él, AB, ΓΔ parecen iguales.

Trácese BΔ desde B hasta Δ y córtese en dos partes iguales por el punto E, y desde E trácese EZ formando ángulos rectos con ΔB.

Digo que si se pone el ojo sobre EZ parecerán iguales AB, ΓΔ.

Esté situado el ojo sobre EZ y sea Z, e incidan los rayos AZ, ZB, ZE, ZΔ, ZΓ. Efectivamente, la recta ZB es igual a ZΔ. Pero también se ha supuesto que AB es igual a ΓΔ; luego las dos rectas AB, BZ son iguales a las dos ΓΔ, ΔZ. Y contienen ángulos rectos; luego el ángulo correspondiente a BZA es igual al correspondiente a ΔZΓ.

Luego AB, ΓΔ se verán iguales [Def. 4].

Digo que también se verán desiguales.

Cámbiese de posición el ojo y sea H[43], y trácese HE e incidan los rayos HB, HA, HΓ, HΔ. Entonces HB es mayor que

[43] VER EECKE indica que hay que entender que la nueva posición del ojo H se encuentra en el mismo plano BEΔ al que son perpendiculares AB y ΓΔ.

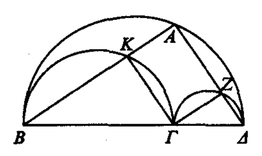
HΔ. De HB quítese BΘ igual a HΔ, y trácese AΘ. Por tanto, el ángulo correspondiente a BΘA es igual al correspondiente a ΓHΔ; pero el correspondiente a BΘA es mayor que el correspondiente a BHA, el exterior mayor que el interior[44] [*Elem.* I 16]. Luego también el correspondiente a ΓHΔ es mayor que el correspondiente a BHA.

Luego ΓΔ parecerá mayor que AB [Def. 4].

Proposición 47

Hay ciertos lugares en los cuales, si se pone el ojo, la suma en una misma magnitud de las magnitudes desiguales parecerá igual a cada una de las desiguales[45].

Pues sea BΓ mayor que ΓΔ y descríbanse semicírculos en torno a BΓ, ΓΔ y en torno a la recta entera BΔ. Así, el ángulo inscrito en el semicírculo BAΔ es igual al inscrito en BKΓ, pues cada uno de ellos es recto. Luego BΓ parece igual a BΔ. De la misma manera también BΔ parece igual a ΓΔ si los ojos están situados en los semicírculos BAΔ, ΓZΔ.



Luego hay ciertos lugares en los que la suma en la misma magnitud de dos magnitudes desiguales parece igual a cada una de las magnitudes desiguales.

---

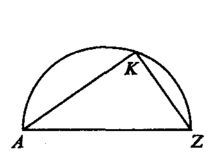
[44] Tomando como referencia el triángulo AΘH.

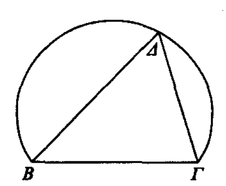
[45] La traducción literal del enunciado «Hay ciertos lugares en los cuales, si se pone el ojo, las magnitudes desiguales sumadas en la misma parecerán iguales a cada una de las desiguales» lo hubiera dejado prácticamente incomprensible; de ahí que haya preferido en mi versión resolver el anacoluto del texto griego mejor que respetarlo.

PROPOSICIÓN 48

Hallar los lugares desde los cuales la misma magnitud parecerá la mitad o la cuarta parte o, en general, en la proporción en la que se corta el ángulo.

Sea AZ igual a BΓ y descríbase en torno a AZ un semicírculo y dibújese en él el ángulo recto K; por otro lado, sea BΓ igual a AZ y circunscríbase en torno a BΓ un segmento que admita un ángulo que sea la mitad del de K [*Elem.* I 9 y III 33]. Así, el ángulo K es el doble que el ángulo Δ.





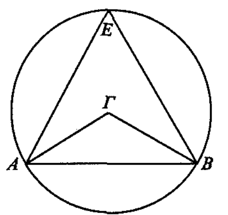
Luego AZ parece doble que BΓ si los ojos están situados en los arcos de circunferencia AKZ, BΔΓ.

PROPOSICIÓN 49

Sea AB *una magnitud vista. Digo que* AB *tiene lugares que, al poner el ojo en ellos, la misma magnitud parece a veces la mitad, a veces entera, a veces la cuarta parte y, en general, se ve en la razón dada.*

Circunscríbase el círculo AEB en torno a la recta AB de manera que AB no sea el diámetro y tómese el centro del

círculo y sea Γ, en el cual esté situado el ojo, y trácense las rectas AΓ, ΓB. Luego AB se ve bajo el ángulo AΓB.



Esté situado el ojo sobre la circunferencia del círculo y sea E, e incidan los rayos EA, EB. Puesto que el ángulo correspondiente a AΓB es el doble del correspondiente a AEB [*Elem.* III 20], entonces desde Γ se ve AB el doble que desde E. E igualmente se verá como la cuarta parte si el ángulo fuera la cuarta parte del ángulo, y en la razón dada.

Proposición 50

Si unos objetos que se trasladan a la misma velocidad y que tienen sus extremos del mismo lado sobre una recta que forma ángulos rectos con ellos, se acercan a la paralela a la recta dicha trazada por el ojo, parecerá que lo más lejano al ojo precede a lo más cercano, mientras que al cambiar de lado[46] *parecerá que lo que precedía va siguiendo y que lo que iba siguiendo precede.*

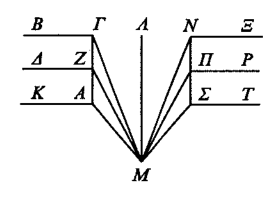
Trasládense a la misma velocidad BΓ, ΔZ, KA, que tienen los extremos del mismo lado Γ, Z, A, sobre la recta ΓA que forma ángulos rectos con ellos, y desde el ojo M trácese MΛ[47] paralela a ΓA y únanse MΓ, MZ, MA. Así parece que BΓ

[46] Con relación a la paralela a la recta primera trazada por el ojo.

[47] Llama la atención en esta proposición la referencia a esta recta MΛ que, una vez trazada, no vuelve a mencionarse ni a emplearse en el razonamiento. A la vista del texto y de la ilustración, entiendo que cabe la sospecha de algún género de corrupción textual. El elevado número de

es el que precede y KA el que va siguiendo porque da la impresión de que, de los rayos incidentes desde el ojo, MΓ se desvía más hacia Γ que los otros rayos. Luego al acercarse, parecerá que MΓ es el que precede, como se ha dicho.

Pero al cambiar de lado BΓ, ΔZ, KA transformados en NΞ, ΠP, ΣT, incidan los rayos MN, MΠ, MΣ. Así, parece que NΞ se desvía hacia Ξ porque el rayo MN se desvía hacia Ξ[48] más que los otros rayos; y ΣT está desviado hacia T porque también el rayo MΣ está desviado hacia T más que los otros rayos.



Luego el que precede, BΓ, transformado en NΞ, parecerá que va siguiendo, mientras que AK, transformado en ΣT, parecerá que precede.

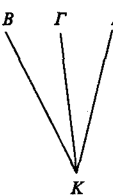
Proposición 51

Si al trasladarse varios objetos a distinta velocidad se traslada también con ellos el ojo en la misma dirección, los objetos que se trasladan a la misma velocidad que el ojo parecerán estar fijos; los que se trasladan más despacio, que se trasladan en dirección contraria; los que van más deprisa, que se trasladan hacia lo que les precede.

variantes, raspados, añadidos y sobreescritos que menciona el aparato crítico de Heiberg refuerza aún más la sospecha.

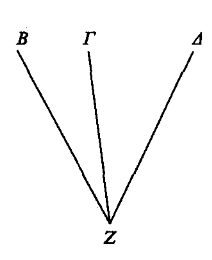
[48] Los manuscritos presentan la lectura N, que es evidentemente errónea; adopto la corrección Ξ propuesta por Weissenborn.

Traslădense a distinta velocidad B, Γ, Δ y traslădense B más despacio, Γ a la misma velocidad que el ojo y Δ más deprisa que Γ. Incidan desde el ojo K los rayos KB, KΓ, KΔ. Así, parecerá al ojo que Γ, al trasladarse, está fijo; que B, al ser dejado atrás, se traslada en dirección contraria; y Δ, el que se ha supuesto que va más deprisa de ellos, parecerá que se traslada hacia delante, pues está a mayor distancia de ellos.



Proposición 52

Si al trasladarse ciertos objetos aparece algo que no se traslada, lo que no se traslada parecerá trasladarse hacia atrás.



Traslădense B, Δ y permanezca fijo Γ, e incidan desde el ojo los rayos ZB, ZΓ, ZΔ. Así, B, al trasladarse, estará más cerca que Γ, mientras que Δ, al apartarse, más lejos.

Luego parecerá que Γ se traslada en dirección contraria.

Proposición 53

Al acercarse el ojo más cerca del objeto visto parecerá que el objeto visto es más grande.

Véase BΓ bajo los rayos ZB, ZΓ estando el ojo situado en Z, y cámbiese de posición el ojo más cerca de BΓ y esté si-

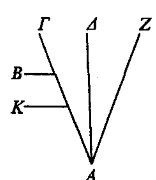
tuado en Δ y véase el mismo objeto bajo los rayos ΔB, ΔΓ. Así, el ángulo Δ es mayor que el ángulo Z, y los objetos vistos bajo un ángulo mayor parecen mayores.

Luego parecerá que BΓ es más grande al estar el ojo en Δ que al estar en Z.

Proposición 54

De los objetos que se trasladan a la misma velocidad, los más lejanos parecen trasladarse más despacio.

Trasládense B, K a la misma velocidad, y desde el ojo A trácense los rayos AΓ, AΔ, AZ. Así, B tiene mayores que K los rayos trazados desde el ojo.

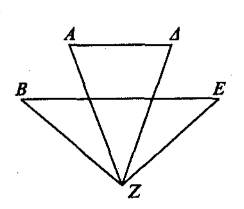


Luego recorrerá una distancia mayor y después, al cambiar de lado, parecerá que el rayo visual AZ se traslada más despacio.

De otra manera

Trasládense dos puntos A, B sobre rectas paralelas y sea Z el ojo desde el cual incidan los rayos ZA, ZB, ZE, ZΔ.

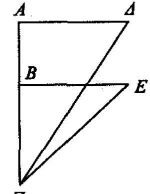
Digo que el más lejano, A, parece trasladarse más despacio que B.



Puesto que AZ, ZΔ contienen un ángulo menor que ZB, ZE, entonces BE se ve mayor que AΔ. Luego, si prolongamos el rayo ZE en línea recta, que en el caso de los objetos que se trasladan a igual velocidad, B sobre el rayo ZE, †[49] impedido se retrasará por tanto de los objetos que se trasladan a igual velocidad los más lejanos parecen trasladarse más despacio.

De otra manera

Trasládense dos puntos A, B sobre las rectas paralelas AΔ, BE uniformemente. Entonces, en el mismo tiempo recorrerán las mismas distancias.



Sean iguales AΔ, BE e incidan desde el ojo Z los rayos ZA, ZΔ, ZB, ZE. Puesto que el ángulo correspondiente a AZΔ es menor que el correspondiente a BZE, entonces la distancia AΔ parecerá menor que BE [Def. 4].

De modo que parecerá que A se traslada más despacio.

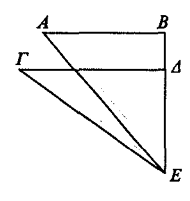
Proposición 55

Si el ojo permanece fijo pero los rayos visuales se deslizan, parecerá que los objetos más lejanos son dejados atrás.

[49] El texto griego presenta una laguna en todos los manuscritos.

Sean A, Γ los objetos vistos, que están sobre las rectas AB, ΓΔ, y sea E el ojo desde el cual incidan los rayos EΓ, EΔ, EA, EB.

Digo que parecerá que el objeto A es dejado atrás.



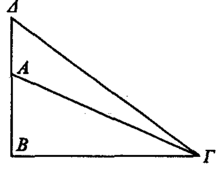
Prolónguese EΔ hasta que se una con AB y sea EB. Puesto que el ángulo correspondiente a ΓEB es mayor que el correspondiente a AEB, entonces la distancia ΓΔ parece mayor que la AB [Def. 4]; de manera que, si el ojo permanece fijo en E, los rayos visuales al deslizarse hacia la parte de A, Γ cambiarán de lado más deprisa el objeto A que el Γ.

Luego parecerá que AB es dejado atrás.

Proposición 56

Las magnitudes que crecen parecen acercarse al ojo.

Sea AB la magnitud vista y sea Γ el ojo desde el cual incidan los rayos ΓA, ΓB. Y crezca BA y sea BΔ, e incida el rayo ΓΔ. Puesto que el ángulo correspondiente a BΓΔ es mayor que el correspondiente a BΓA, entonces BΔ parecerá mayor que BA. Pero las cosas de las que se opina que son mayores que sí mismas dan la impresión de crecer, y las que están más cerca del ojo parecen mayores.

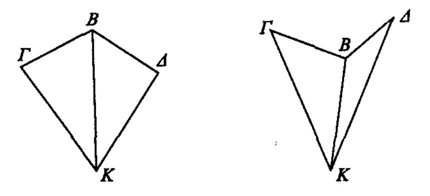


Luego las magnitudes que crecen parecerán acercarse al ojo.

Proposición 57[50]

Cuantos objetos están situados a la misma distancia sin que sus extremos estén en línea recta con su parte media, forman la figura entera a veces cóncava y a veces convexa.

Véase ΓΒΔ estando el ojo situado en Κ, e incidan los rayos ΚΓ, ΚΒ, ΚΔ. Parecerá que la figura entera es cóncava.



Muévase ahora lo que se ve en la parte media y esté situado más cerca del ojo. Parecerá que ΔΒΓ es convexo[51].

Proposición 58

Si desde el punto de contacto de las diagonales de un cuadrado se traza una recta que forme ángulos rectos[52] y se

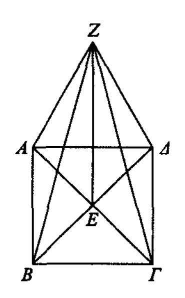
[50] Esta proposición, al igual que la siguiente han sido consideradas sospechosas de ser un añadido.

[51] Para Ver Eecke no hay demostración y, además, entra en contradicción con la proposición 22 si suponemos que el ojo está en el mismo plano. Si supusiéramos el ojo situado más arriba o más abajo daría lugar a diversas ilusiones visuales.

[52] Sobreentiéndase «con el plano del cuadrado».

pone en ella el ojo, los lados del cuadrado parecerán iguales y las diagonales parecerán también iguales.

Sea ABΓΔ el cuadrado y trácense sus diagonales ΔB, ΓA, y trácese desde E una recta elevada EZ que forme ángulos rectos con el plano, sobre la cual esté situado el ojo Z, e incidan los rayos ZA, ZB, ZΔ, ZΓ. Puesto que ΔE es igual a EΓ y EZ es común y los ángulos son rectos, entonces la base ZΓ es igual a la base ΔZ, y de los ángulos adyacentes a la base son iguales aquéllos a los que subtienden los lados iguales. Luego el ángulo correspondiente a EZΓ es igual al correspondiente a EZΔ. Luego EΓ parecerá igual a EΔ. Del mismo modo, también el ángulo correspondiente a AZE es igual al correspondiente a BZE. Luego AΓ parecerá igual a BΔ. Y, a la vez, puesto que ΓZ es igual a ZB, mientras que AZ lo es a ZΔ y también AB a ΓΔ, las tres, por tanto, son iguales a las tres, y el ángulo igual al ángulo.



Luego el lado parecerá igual al lado, de modo que también los restantes lados parecerán iguales.

Pero si la recta trazada desde el ojo hasta el punto de contacto de las diagonales ni forma ángulos rectos con el plano ni es igual a cada una de las rectas trazadas desde el punto de contacto hasta los ángulos del cuadrado ni forma con ellas ángulos iguales, las diagonales parecerán desiguales. Demostraremos lo que sucede de la misma manera que en los círculos.

EUCLIDES

CATÓPTRICA

INTRODUCCIÓN

LA CATÓPTRICA EN LA ANTIGÜEDAD GRIEGA

Si al estudiar el nacimiento de la óptica veíamos que se había desarrollado a partir de los intentos de resolución de problemas de perspectiva, al aproximarnos a la catóptrica queda de relieve que ésta no pudo independizarse sino después de establecidos ciertos principios básicos de la óptica general —concretamente, el del desplazamiento del rayo visual en línea recta— indispensables para comprender los fenómenos relativos a la luz refleja.

Nada más podemos decir sobre los orígenes de la catóptrica ni sobre el momento en que se constituyó como disciplina separada. La especialización se nos muestra ya realizada precisamente con Euclides, a quien se le atribuyen estudios separados sobre ambas materias. Los conocimientos griegos sobre esta ciencia figuran, además de en la *Catóptrica* que ahora presentamos, en las referencias a una *Catóptrica* de Arquímedes, la *Catóptrica* atribuida a Herón y los libros IV y V de la *Óptica* de Ptolomeo, obras cuyo conocimiento nos es indispensable para el análisis de este tratado.

Las noticias sobre la obra de Arquímedes indican que presentaba dos novedades de importancia: la primera, un procedimiento característico de la catóptrica antigua hasta Alhazén (965-1039) para construir el punto-imagen[1]; la segunda, el reconocimiento del fenómeno de la refracción, aunque lo más probable es que no conociera la ley de la perpendicular trazada del objeto a la superficie de separación.

De la *Catóptrica* de Herón de Alejandría *(fl. c.* 62 d. C.) conservamos sólo una versión latina resumen del original griego. La simple lectura del tratado hace evidente que el propio Herón llegó a fabricar los espejos cuyos efectos describe. Sus demostraciones no eran impecables desde el punto de vista matemático y a Herón le bastaba conseguir mediante un razonamiento aproximativo las constataciones obtenidas de hecho mediante la observación.

La *Óptica* de Ptolomeo es una versión latina medieval mutilada de la traducción árabe del original, pero a pesar de ello es el mejor testimonio que poseemos. Es una obra de gran extensión, que podemos datar con seguridad y muy superior en lo científico. Ptolomeo abandona el método geométrico deductivo y recurre a la experimentación e incluso a las mediciones directas. El progreso de la catóptrica que pone de relieve su obra reside sobre todo en el perfecciona-

---

[1] Según ese procedimiento, el punto imagen se localiza en la intersección del rayo visual incidente con la perpendicular trazada del objeto al espejo. La ley es inexacta, pero permitió importantes avances, especialmente en lo relativo al funcionamiento de los espejos planos. Este principio mantuvo su vigencia durante toda la Antigüedad y la Edad Media y, a pesar de ser varios los autores en el siglo XVII que percibieron el error experimentalmente, siguió siendo aceptado hasta principios del XVIII. No sabemos con certeza si su descubrimiento se debe a Arquimedes o a algún otro científico perteneciente a la época que media entre la *Catóptrica* euclidiana y la de Herón.

miento de los métodos y la gran contribución de Ptolomeo es la de transformar los postulados de la catóptrica en auténticas leyes físicas mediante el uso de la experimentación.

UN TRABAJO DE COMPILACIÓN

Al igual que en la *Óptica,* la primera cuestión filológica que hay que abordar en relación con la *Catóptrica* es la de su autenticidad, pero con una distinción: mientras que las dudas sobre la *Óptica* fueron siempre frenadas por el hecho de que las fuentes antiguas mencionaban ese título entre las obras de Euclides, la segunda, por razones de diversa índole, como veremos, gozó poco tiempo de ese beneficio; hoy en día nadie pone en duda su carácter espurio. En el siglo XVI la autenticidad era todavía admitida sin reservas y estaba basada en que los manuscritos atribuyen unánimemente a Euclides el tratado.

En el siglo XVII aparecen las primeras voces que rechazan la paternidad euclidiana. Las razones que se aducen son fundamentalmente de orden científico. El argumento que más pesaba en la consideración de los estudiosos era el de la falta de rigor. Es curioso que la postura más benévola proceda de Iohannes Kepler[2], gran físico y padre de la óptica

[2] En una de sus cartas escribe: «Arguyes que la Catóptrica de Euclides es espuria: erróneamente, a mi juicio. Las palabras claras, nítidas, finas, incluso bien compuestas, las demostraciones rotundas y breves, cuidadosa la distinción entre los supuestos y lo demostrado a partir de los supuestos. Además no es, como dices, torpe error ver qué se sigue a partir de un supuesto falso, sino que asumir algo falso es confesión de la oscuridad de la naturaleza o, si fuera error, desde luego no es increíble en Euclides, que filosofa sobre los rayos visuales de acuerdo con su tiempo,

moderna, que fue, además, uno de los primeros en detectar lo erróneo de la ley de construcción del punto-imagen.

Kepler percibió, con muy buen sentido, que la genialidad de un trabajo es la que da fama y renombre a un gran científico, pero que eso no prueba la inversa, a saber, que todo trabajo de un famoso científico haya de ser genial. En otras palabras: la pobreza de resultados científicos en la *Catóptrica* no puede ser tomada como argumento a favor ni en contra de la autoría euclidiana.

Como la de la autoría es una cuestión filológica, debía ser la filología quien aportara los argumentos significativos a este respecto. Fue Heiberg[3] quien recogió y presentó los datos que llevarían a una postura concluyente. Las referencias más antiguas a esta obra son las de Proclo, comentador de los *Elementos,* posteriores en más de setecientos años a la supuesta redacción del trabajo. Al no haber ninguna mención más antigua que éstas, cabe la posibilidad de que Proclo, consultando para sus comentarios la *Óptica* de Euclides y teniendo a la vista una *Catóptrica* de algún otro autor, hubiera sufrido un error; de modo que puede ser que Euclides no escribiera ninguna *Catóptrica.*

Además, se observan ciertas diferencias terminológicas con la *Óptica:* en ésta, el rayo visual suele ser designado con el término *aktís,* mientras que en la *Catóptrica* aparece *ópsis;* en la *Catóptrica,* los ángulos suelen designarse mediante una letra —la del vértice— mientras que en la *Óptica* con tres —el vértice y el otro extremo de cada una de las rectas que lo componen—.

---

para las entendederas de los hombres aquéllos» (Texto aportado por Heiberg, *Literargeschichtliche Studien...,* pág. 90).

[3] *Literargeschichtliche Studien...,* pág. 152. V. también *Geschichte...,* págs. 77 y 78.

De estos datos y del análisis de la propia obra concluía Heiberg que el tratado es un conglomerado de diversos elementos de variada procedencia, en el que una parte podía haber sido tomada de fuentes antiguas; percibía en el conjunto del tratado la falta de un plan previo, a pesar de que algunas de las proposiciones son muy interesantes por sí mismas y sugería la posibilidad de que la obra hubiera sido compuesta por Teón (s. IV) al efecto de completar el *Mikròs astronomoúmenos*[4]. Así interpretado, continúa Heiberg, se entiende mejor por qué la *Catóptrica* pseudo-euclidiana presenta huellas de haber empleado la *Catóptrica* atribuida a Herón.

Todos estos datos asentaban la tesis de que la obra no pertenece a Euclides. Pero el caso es que esta postura filológica se mezcló con el juicio crítico negativo de los científicos como si todos los argumentos empleados valieran para todo, de manera que datos y razonamientos fueron interpretados de tal manera que suscitaban una prevención frente a la fiabilidad del tratado. Con ello, la exactitud de los resultados de estas investigaciones no contribuyó a que la obra fuera apreciada con justeza, sino a generar una posición de menosprecio. En esa línea, Heath no le dedica sino una decena de líneas, resumen de lo publicado por Heiberg; y Loria parece excusar al autor, en vez de valorar la obra, cuando afirma que no deberíamos despreciarla aunque sólo sea por tratarse del primer testimonio de un estudio racional de los fenómenos procedentes de la reflexión de la luz en espejos planos o esféricos.

La superación de los prejuicios aparecería medio siglo después, en el libro de Lejeune *Recherches sur la catoptrique grecque d'après les sources antiques et médiévales*

[4] Cf. introducción a la *Óptica*, nota 19.

(Bruselas, 1957). En él lleva a cabo una investigación exhaustiva sobre la catóptrica griega que incluye un detalladísimo estudio sobre esta obra y manifiesta: «Nuestro examen... ha confirmado netamente la opinión de Heiberg de que se trata de una compilación tardía de valor científico menor que mediocre. Pero una obra sin valor no es necesariamente un documento sin interés».

De acuerdo con el estudio de Lejeune, los principios fundamentales de la reflexión se resumen, según Ptolomeo, en las tres leyes de la catóptrica antigua[5]: 1) el punto-imagen aparece siguiendo el rayo visual incidente; 2) el punto-imagen está situado en la perpendicular trazada del punto-objeto al espejo; 3) el rayo visual incidente y el rayo visual reflejado forman ángulos iguales con la perpendicular al espejo trazada por el punto de reflexión.

Comparando esas leyes con los postulados propuestos por el autor de la *Catóptrica* pseudo-euclidiana, Lejeune obtiene las siguientes conclusiones:

— los postulados primero y sexto son inútiles para las demostraciones subsiguientes —especialmente el sexto, que, de hecho, no llega a ser utilizado en ninguna de ellas— y aparecen por razones puramente didácticas (recordemos que esa era la función con que se compuso el *Mikròs Astronomoúmenos,* del cual probablemente esta *Catóptrica* formaba parte).

El postulado primero tiene como objetivo recordar al estudiante la ley fundamental de la óptica geométrica y el sexto avanza un elemento necesario para la explicación de ciertos fenómenos de la observación astronómica. Es decir,

[5] PTOLOMEO, *Óptica* 88, 9-19. Tomo la referencia de LEJEUNE, *op. cit.,* pág. 33.

sirven para establecer puntos de contacto entre lo ya estudiado y lo que se ha de estudiar.

— los postulados segundo, tercero, cuarto y quinto son los verdaderos presupuestos del tratado y contienen las tres leyes de la reflexión de Ptolomeo. La primera ley estaría contenida en el segundo postulado; la segunda ley estaría contenida en los postulados cuarto y quinto y, por último, el tercer postulado y su corolario, el teorema I, presentan la tercera ley como un hecho demostrable geométricamente. En realidad, éste último es un dato que conocemos gracias a la observación, pero el tratadista, al presentarlo de esa manera, creía seguramente estar «mejorando» la tradición recibida, acercando a la matemática pura y apartando de la experiencia la ciencia de que se ocupa.

Al estudiar las proposiciones, Lejeune observa en el tratado un plan de conjunto en el que la construcción del punto-imagen aparece por primera vez en las proposiciones 16 a 18.

De ahí deduce que la *Catóptrica* habría sido planeada de modo que resultaran dos partes bien diferenciadas, cada una con quince teoremas. La primera ofrece lo que se puede deducir de dos de las leyes, la del rayo incidente y la de la igualdad de los ángulos de incidencia y reflexión. La segunda parte, que toma ya en consideración la ley de la perpendicular objeto-espejo, desarrolla en toda su amplitud el estudio de las propiedades de las imágenes especulares; la presencia de contradicciones y/o repeticiones innecesarias[6] confirmaría la hipótesis de que la *Catóptrica,* en su estado actual, es de hecho una compilación de fuentes diversas.

[6] Contradicciones encontramos entre los teoremas 9 y 19; entre los teoremas 10 y 20 o entre los teoremas 12 y 28. Como ejemplo de repetición tenemos el de las proposiciones 5 y 24: ambas estudian el caso del ojo puesto en el centro de la esfera de un espejo cóncavo.

De acuerdo con esto, el pseudo-Euclides utilizó dos fuentes o dos series de fuentes distintas: la primera parte, basada en sólo dos de las leyes, representaría un estadio de la catóptrica cronológicamente anterior al de la segunda, en la que se contemplan y emplean las tres leyes ptolemaicas para el estudio de las propiedades de los espejos planos y esféricos.

Ahora bien, el tratadista parece ignorar ciertas conclusiones de importancia obtenidas por Ptolomeo; de ello deduce Lejeune que la segunda fuente utilizada por el pseudo-Euclides hubo de ser un tratado anterior a la *Óptica* ptolemaica; además, se producen importantes coincidencias con la *Catóptrica* de Herón, y esto sugiere la posibilidad de que la fuente más reciente fuera la *Catóptrica* de este autor. En cuanto a la fuente utilizada para la primera parte, la más antigua, debió de tratarse de un autor anterior a Arquímedes; pudo incluso tratarse de la auténtica *Catóptrica* euclidiana, la cual, aunque ya muy superada por los trabajos de Arquímedes y Herón, seguía teniendo a su favor el renombre de Euclides. Dentro de la cuestión de autoría Lejeune, como antes Heiberg, se inclina en favor de Teón, pero los argumentos en pro de la atribución a un matemático destacado casan mal con el elevado número de veces que a lo largo de la obra trata de torpe al compilador.

Como corolario de su estudio, Lejeune procede a un intento de reconstrucción de algunos de los rasgos de la perdida *Catóptrica* euclidiana. Es probable que Euclides *(fl. c.* 300 a. C.) diera a su *Catóptrica* una forma semejante a la de su *Óptica,* es decir, exclusivamente geométrica y deductiva, y que no recurriera a la experimentación como método. La obra representaba probablemente un estadio muy primitivo de la catóptrica, que lograba explicar ciertos fenómenos como las inversiones laterales de las imágenes en los espe-

jos planos, pero aún no contaba con una teoría que permitiera la localización de la imagen. Así, las conclusiones que obtenía eran suficientemente vagas para parecer confirmadas por la observación vulgar, aunque en realidad muy imperfectas.

En cuanto a ediciones y traducciones, la *Catóptrica* ha sido publicada generalmente junto con la *Óptica* y los trabajos más señalados han sido ya reseñados en la bibliografía y la introducción a la *Óptica*. Sólo hemos de añadir la edición grecolatina preparada por Dasypodius (Estrasburgo, 1557). En cuanto a ediciones modernas, el trabajo de Heiberg-Menge sigue siendo el más fiable, y en él nos hemos basado para la traducción que sigue, así como para las ilustraciones.

[DEFINICIONES][1]

1. El rayo visual es una recta cuyas partes medias están todas en línea con los extremos[2].
2. Todos los objetos vistos se ven mediante rectas.
3. Si se coloca un espejo en un plano y se contempla cierta altura que es perpendicular al plano, resulta una proporción en la que la recta que hay entre el espejo y el espectador es a la que hay entre el espejo y la altura perpendicular como la altura del espectador es a la altura perpendicular al plano[3].

---

[1] El título «Definiciones» no figura en los manuscritos, sino que fue puesto por el editor. Como en la *Óptica,* no tienen carácter de definiciones, sino que en ellas se mezclan los axiomas con las observaciones tomadas de la realidad.

[2] La definición de recta que se nos ofrece no es la euclidiana *(Elementos* I 4), sino la platónica *(Parménides* 137 e) ligeramente modificada: el plural sustituye al dual, el indicativo al subjuntivo, el tardío *epiprosthéō* a la expresión adverbial *epíprosthen eînai.*

[3] El aserto es una aplicación de la semejanza de triángulos —basta sustituir «espejo» por «plano de referencia» en el texto para comprobarlo— y presupone la igualdad de los ángulos de incidencia y reflexión, a pesar de que esta ley básica no se nos presenta como un axioma, presupuesto o postulado, sino como deducción probada en la primera proposición.

4. Si en los espejos planos se ocupa el lugar sobre el que cae la perpendicular desde el objeto visto, ya no se ve el objeto visto[4].
5. Y en los espejos convexos, si se ocupa el lugar por el que se traza[5] desde el objeto visto hacia el centro de la esfera, ya no se ve el objeto visto. Y lo mismo ocurre también en los cóncavos.
6. Si se deposita algo en un vaso y se toma una distancia tal que ya no se vea, estando a la misma distancia, si se vierte agua se verá el objeto depositado[6].

Proposición 1

En los espejos planos y convexos y cóncavos los rayos visuales se reflejan[7] *en ángulos iguales.*

[4] En su nota a este pasaje Ver Eecke afirma: «es decir, que la imagen de un objeto no será vista en la propia superficie del espejo, sino más allá de esta superficie, a determinada profundidad sobre la perpendicular trazada del objeto hacia la superficie del espejo». Efectivamente eso es lo que sucede, pero no veo base ni apoyo alguno para interpretar de ese modo el texto euclidiano.

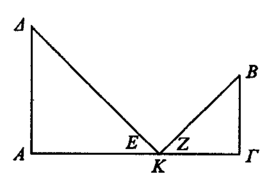
[5] Sobreentiéndase «la recta».

[6] Aparece junto con las otras definiciones, pero en realidad es un fenómeno observable. Es, además, la única referencia en esta obra al fenómeno de la refracción (aún sin nombre en este estadio de la ciencia griega). Según afirma Olimpiodoro en sus *Comentarios a la Meteorología de Aristóteles* este hecho fue demostrado por Arquímedes. La refracción no aparece estudiada con cierta amplitud en el mundo griego hasta las obras de Ptolomeo, en el siglo II de nuestra era, y las principales leyes concernientes a este fenómeno no serían formuladas hasta el siglo XVII.

[7] El fenómeno de la «reflexión» y su efecto, «el rayo reflejado», reciben en griego el nombre único de *anáklasis;* el verbo correspondiente, que aparece aquí por primera vez, es *anakláomai.*

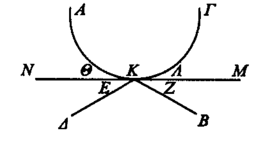
Sea B el ojo y AΓ el espejo plano y llévese el rayo BK desde el ojo y refléjese hacia Δ.

Digo que el ángulo E es igual al ángulo Z.



Trácense las rectas BΓ, ΔA perpendiculares al espejo. Y entonces BΓ es a ΓK como ΔA a AK, pues eso se había supuesto en las definiciones [Def. 3]. Entonces el triángulo BΓK es semejante al triángulo ΔAK. Luego el ángulo E es igual al ángulo Z, ya que los triángulos semejantes son equiángulos.

Sea AKΓ un espejo convexo, y sea BK el rayo visual que se refleja en Δ.



Digo que el ángulo suma de E, Θ[8] será igual al ángulo suma de Z, Λ.

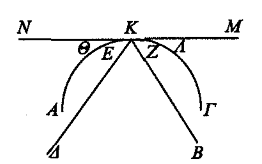
Coloco el espejo plano NM; entonces, el ángulo E es igual al Z; y también el Θ al Λ, puesto que MN es tangente.

---

[8] En los tratados matemáticos griegos, la referencia a un ángulo suele hacerse bien mediante la mención de su vértice *(hē A, hē pròs tôi A)*. En la *Catóptrica* es frecuente que aparezca otra forma más, en expresiones del tipo *hē A, B:* en estos casos suele referirse a un ángulo que es suma de los dos cuyo vértice se menciona. Traduzco la expresión, cuando aparece, como «el ángulo suma de A, B».

Encontramos aquí considerado por primera vez el ángulo formado por una circunferencia y su tangente, al que los griegos denominaban *keratoeidḗs* (lit., «en forma de cuerno»), de acuerdo con la clasificación de los ángulos transmitida por Proclo. Euclides se ocupa de él en algunas ocasiones y en *Elementos* III 16 lo considera menor que cualquier ángulo agudo rectilíneo. Actualmente se le denomina ángulo de contingencia y se le considera nulo. En relación con esta cuestión geométrica puede verse el comentario de HEATH a *Elementos* I, Def. 8 y 9 *(The Thirteen Books of the Elements*, vol. I, págs. 176-178), y a las proposiciones I 5 (*ibid.*, vol. I, págs. 252-254) y a III 16 *(ibid.*, vol. II, págs. 39 y ss.), así como, de ese mismo autor, *A History of Greek Mathematics*, vol. I, págs. 178-179.

Luego todo el ángulo suma de E, Θ es igual a todo el ángulo suma de Λ, Z.



Sea ahora AKΓ un espejo cóncavo y sea BK el rayo visual que se refleja en Δ.

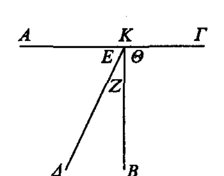
Digo que el ángulo E es igual al Z.

Pues si se coloca un espejo plano resulta igual el ángulo suma de ΘE al ángulo suma de ZΛ. Yel ángulo Θ es igual al Λ; luego el ángulo restante E será igual al Z.

Proposición 2

Si un rayo visual incide en cualquier clase de espejo produciendo ángulos iguales, se reflejará siguiéndose a sí mismo.

Sea AΓ un espejo plano y B el ojo y haya incidido el rayo visual BK produciendo los ángulos E, Z cuya suma es igual a Θ.



Digo que el rayo visual BK al reflejarse pasará a través de sí mismo, es decir, hacia B.

Pues no sea así, sino que, si es posible, vaya hacia Δ. Y puesto que los rayos visuales se reflejan en ángulos iguales, el ángulo E es igual al Θ. Y se había demostrado que el ángulo suma de E, Z era igual al Θ [Prop. 1]. Luego también el ángulo suma de E, Z será igual al ángulo E, el mayor al menor: lo cual es imposible. Luego el rayo BK se reflejará siguiéndose a sí mismo.

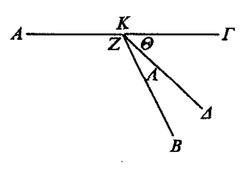
Y la misma demostración sería apta en el caso de los espejos convexos y cóncavos.

Proposición 3

Si el rayo visual al incidir en cualquier clase de espejo forma ángulos desiguales, ni se reflejará siguiéndose a sí mismo ni hacia el ángulo menor.

Sea AKΓ un espejo plano, e incida el rayo visual BK formando el ángulo Z mayor que el ángulo suma de Θ, Λ.

Digo que al reflejarse BK ni se reflejará siguiéndose a sí mismo ni hacia al ángulo suma de Θ, Λ.



Pues si fuera hacia B, el ángulo Z sería igual al Θ, Λ: lo que es imposible, pues se ha supuesto mayor. Y si fuera hacia Δ, el ángulo Z sería igual al Θ: pero es mayor. Luego BK se reflejará hacia el ángulo mayor Z, pues es posible quitar del ángulo mayor uno igual al menor.

La misma demostración cabe en el caso de los convexos y cóncavos.

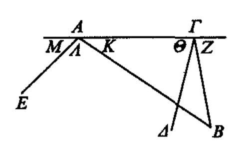
Proposición 4

Los rayos visuales que se reflejan sobre los espejos planos y convexos no serán ni concurrentes entre sí ni paralelos.

Sea AΓ un espejo plano y B el ojo y BΓΔ, BAE los rayos visuales reflejados.

Digo que ΓΔ, AE ni son paralelas ni serán concurrentes hacia Δ, E.

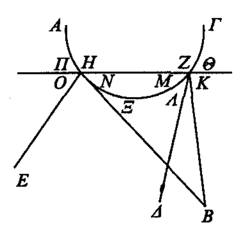
Puesto que el ángulo Z es igual al Θ y el ángulo K es igual al ángulo M, mientras que el ángulo Z es mayor que el K por ser exterior al triángulo BAΓ [*Elem.* I 16], también Θ sería mayor que M. Luego ΓΔ no es paralela a AE ni serán concurrentes hacia E, Δ.



Sea ahora AZΓ un espejo convexo y B el ojo y BZΔ, BHE los rayos visuales que se reflejan[9].

Digo que ZΔ, EH ni son paralelas ni serán concurrentes hacia E, Δ.

Trácese la recta HZ y prolónguese por ambos extremos. Puesto que el ángulo suma de K, Θ es igual al ángulo Λ por producirse la reflexión en ángulos iguales [Prop. 1], el ángulo suma de Λ, M sería mayor que K. Y K es mayor que el ángulo suma de N, Ξ [*Elem.* I 16] y el ángulo suma de N, Ξ es mayor que el ángulo suma de O, Π, ya que el propio ángulo Ξ es igual a OΠ. Luego el ángulo suma de Λ, M es mucho mayor que O. Luego las rectas ZΔ, HE no serán concurrentes ni son paralelas.



Proposición 5

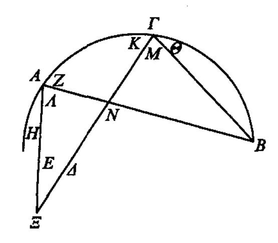
En los espejos cóncavos, si se pone el ojo en el centro, o en la circunferencia o fuera de la circunferencia, es decir,

[9] Entiendo que la figura que ofrece Heiberg es errónea.

entre el centro y la circunferencia, los rayos visuales al reflejarse serán concurrentes.

Sea ΑΓΔ un espejo cóncavo, y Β el centro de la esfera, y póngase el ojo en Β, e incidan desde Β en la circunferencia los rayos visuales ΒΑ, ΒΓ, ΒΔ.

Entonces, los ángulos con sus vértices en Α, Δ, Γ son iguales, pues son de un semicírculo[10]; luego los rayos visuales ΒΑ, ΒΓ, ΒΔ, al reflejarse, se reflejarán siguiéndose a sí mismos: eso ya se ha demostrado [Prop. 2]. De manera que serán concurrentes en Β.



Sea ahora ΑΓΒ un espejo cóncavo, y el ojo Β, y esté sobre la circunferencia de aquél; e incidan desde Β los rayos visuales ΒΓ, ΒΑ que se reflejan hacia los puntos Δ, Ε.

Puesto que el segmento ΑΓΒ es mayor que el segmento ΒΓ, el ángulo Ζ es mayor que el ángulo Θ. Por tanto, también el ángulo Η es mayor que el Κ [Prop. 1]. Luego la suma de los ángulos Ζ, Η es mayor que la de los ángulos Θ, Κ. Luego el ángulo restante Λ es menor que Μ; luego es mucho menor que Ν. Luego las rectas ΓΔ, ΑΕ coincidirán en Ξ.

Se demostrará de la misma manera aunque el ojo caiga fuera de la circunferencia, como en la proposición que sigue.

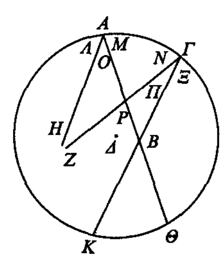
[10] El ángulo de un semicírculo *(hēmikykliou gōnía)* es el que forma un diámetro con la circunferencia a la que pertenece. Euclides (III 16) lo considera mayor que cualquier ángulo agudo rectilíneo. Para más información sobre esta cuestión geométrica puede recurrirse a los lugares citados más arriba, nota 8.

Proposición 6

En los espejos cóncavos, si pones el ojo entre el centro y la circunferencia, los rayos visuales que se reflejan unas veces coincidirán y otras veces no coincidirán[11].

Sea ΑΓ un espejo cóncavo y Δ su centro, y esté el ojo Β situado entre el centro y la circunferencia, y sean ΒΑ, ΒΓ rayos visuales que se reflejan hacia Η, Ζ y prolónguense los rayos visuales ΑΘ, ΓΚ hasta el espejo.

El rayo visual ΑΘ es mayor, igual o menor que ΓΚ. Si el rayo visual ΑΖ es igual al rayo visual ΓΚ, también el arco de circunferencia[12] ΑΓΘ es igual al arco de circunferencia ΓΘΚ; de ese modo también el ángulo Μ es igual al ángulo Ξ, pues-



to que los ángulos correspondientes a arcos de circunferencia iguales son también iguales entre sí [Cf. *Elem.* III 21]. Entonces, también los ángulos Μ, Λ son iguales a los ángulos Ν, Ξ por la reflexión [Prop. 1]. Luego también el ángulo restante Ο es igual al Π; luego Ρ es mayor que Ο. Puesto que el ángulo Ρ es mayor que Π por ser exterior [*Elem.* I 16] y el ángulo Π es igual a Ο, entonces el Ρ es mayor que el Ο. Añádase en co-

[11] Como el lector ha podido ya observar, el enunciado de esta proposición es contradictorio con el de la anterior.

[12] Los textos euclídeos utilizan el término *periféreia* para designar tanto la «circunferencia» como el «arco de circunferencia»; el castellano sí suele distinguir; por eso he preferido optar entre ambos ateniéndome al contexto.

mún el ángulo OPZ: entonces los rayos visuales ΓZ, AH concurrirán hacia los puntos H, Z.

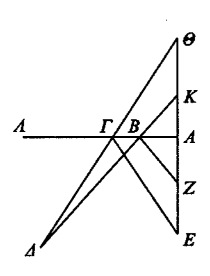
Lo mismo ocurrirá aunque el rayo visual AΘ sea mayor que el ΓK. Luego los ángulos Λ, M serán mayores que los N, Ξ, y el ángulo Π será mayor que el O y el P mayor que el O. Pero si la recta AΘ es menor que la ΓK, por las mismas razones el ángulo O será mayor que el ángulo Π. Y también P es mayor que Π; luego nada impide que P sea igual a O o menor que O y que AH no sea concurrente con ΓZ. Y es evidente que tanto si el arco de circunferencia AΘ es mayor que el ΓK como si son iguales, la coincidencia de los rayos reflejados no se producirá ni en la circunferencia del círculo ni fuera de ella, sino sólo en su interior.

Proposición 7

Las alturas y las profundidades de los espejos planos aparecen vueltas cabeza abajo.

Sea AE una altura, y AΛ un espejo plano y B el ojo, y BΓ, BΔ los rayos visuales que se reflejan hacia los puntos E, K.

Entonces, al ser prolongados en línea recta los rayos visuales, E, que está arriba, aparece en Θ, que está abajo, mientras que K, que está abajo, aparece en Z, que está arriba; de manera que en apariencia están vueltas cabeza abajo.

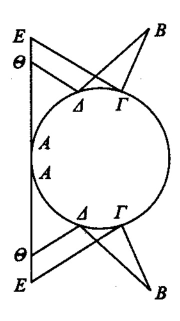


Sea ahora EA una profundidad, y AΓ un espejo plano, y Δ el ojo, y ΔΓ, ΔB los rayos visuales que se reflejan hacia los puntos E, Z.

De la misma manera, al prolongar los rayos visuales hacia los puntos Θ, K, aparecerá E, que está abajo, en Θ, que está arriba, mientras que Z, que está arriba, aparecerá en K, que está abajo.

Proposición 8

Las alturas y las profundidades en los espejos convexos aparecen vueltas cabeza abajo.



Sea AE una altura y AΔΓ un espejo convexo y BΔ, BΓ rayos visuales que se reflejan hacia los puntos E, Θ.

Se ha demostrado que no serán concurrentes [Prop. 4]. Lo demás, como lo de los espejos planos [Prop. 7].

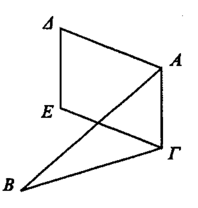
Sea ahora AE una profundidad, y AΓ un espejo convexo, y B el ojo y BΓE, BΔΘ los rayos que se reflejan hacia E, Θ. Lo demás, como en los planos [Prop. 7].

Proposición 9

Las magnitudes alargadas [13]*, en los espejos planos, aparecen tal y como son en verdad.*

[13] Ver Eecke anota que para que tal cosa se cumpla han de estar dispuestas oblicuas o paralelas al espejo, pero no perpendiculares. La figura, como hace notar el mismo autor, es errónea.

Sea B el ojo y ΔE la magnitud alargada y AΓ el espejo.

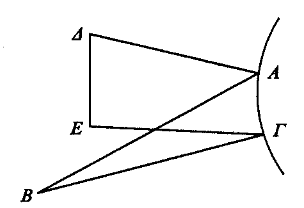


Entonces, al reflejarse los rayos visuales, Δ aparece en A y E en Γ y es en apariencia como es en verdad: lo próximo, próximo; y lo lejano, lejano.

Proposición 10

Las magnitudes oblicuas en los espejos convexos aparecen tal y como son verdaderamente.

Sea EΔ la magnitud y B el ojo y AΓ el espejo convexo y los rayos que se reflejan hacia E, Δ[14]. Lo demás, lo mismo.



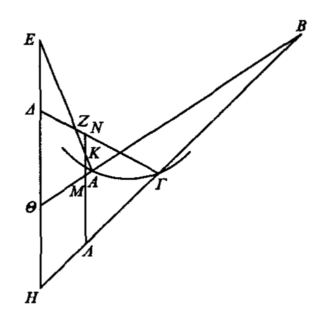
Proposición 11

Las alturas y las profundidades en los espejos cóncavos si están dentro de la concurrencia de los rayos visuales aparecen vueltas cabeza abajo como en los espejos planos y convexos, pero si están fuera de la concurrencia aparecen como son.

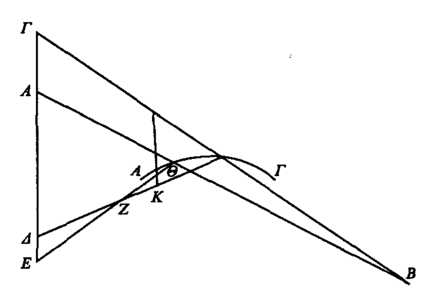
---

[14] La figura, como afirma Ver Eecke, es errónea.

Sea AΓ un espejo cóncavo y B el ojo y BA, BΓ los rayos visuales que se reflejan y sea Z su punto de concurrencia y sean ΔE y KN las alturas y esté KN dentro de la coincidencia Z y ΔE fuera de la coincidencia.



Entonces, una vez prolongados los rayos visuales como en los espejos planos y convexos, el punto K aparece en M y el punto N en Λ, de manera que parecen vueltos cabeza abajo. A la vez, en la altura de fuera de la coincidencia, Δ aparece en H, mientras que E aparece en Θ: aparece tal como es.



Sean ahora ΔE y KΘ la profundidad y AΓ el espejo cóncavo y B el ojo y[15] los rayos visuales que se reflejan y coinciden en Z.

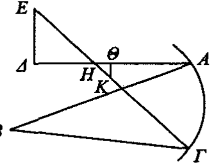
Entonces, al prolongarse los rayos visuales, los puntos K, Θ aparecerán igualmente vueltos cabeza abajo: el K en Γ y el Θ en A, como en los espejos planos y convexos, mientras que Δ, E aparecerán tal como son, E abajo, en A, y Δ arriba en Γ.

[15] Sobreentiéndase «sean BΓ, BA».

Proposición 12

Las magnitudes oblicuas en los espejos cóncavos, cuantas están situadas dentro de la coincidencia de los rayos visuales, aparecen tal y como son, mientras que cuantas están fuera, vueltas cabeza abajo[16].

Sean EΔ, ΘK magnitudes oblicuas, y AΓ un espejo cóncavo y B el ojo y BAΔ, BΓE los rayos visuales que se reflejan y coinciden en H; y esté la magnitud oblicua ΘK por dentro del punto de coincidencia H, y la ΔE por fuera.



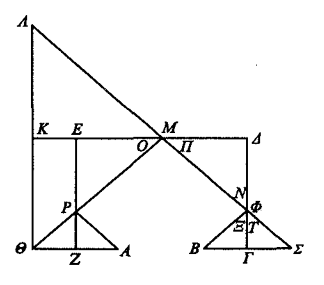
Entonces, los puntos Θ, K aparecen acordes con la naturaleza, como en los espejos planos y convexos, mientras que E, Δ vueltos del otro lado, puesto que Δ aparece en A y E en Γ.

Proposición 13

Es posible ver lo mismo mediante muchos espejos planos.

Sea A lo que ha de verse y B el ojo y sean ΓΔ, ΔE, EZ los tres espejos.

Trácese desde B la recta BΓ perpendicular al espejo ΓΔ, y sea BΓ igual a ΓΣ, y luego trácese desde A la recta AZ perpendicular a EZ, y sea ZΘ igual a AZ;



[16] La figura, afirma Ver Eecke, es errónea.

y trácese desde Θ la recta ΘK perpendicular al espejo ΔE y sea KΛ igual a ΘK y trácese ΛMΞΣ que una Λ con Σ, y trácese MPΘ que una M con Θ, y trácense también AP, BΞ. Puesto que BΓ es igual a ΓΣ y que los ángulos con vértice en Γ son rectos, entonces las dos rectas BΓ, ΓΦ son iguales respectivamente a las dos rectas ΣΓ, ΓΦ y el ángulo BΓΦ, que es recto, es igual al ángulo ΣΓΦ, que es recto, y los ángulos restantes serán iguales a los ángulos restantes, a los que subtienden los lados iguales [*Elem.* I 4]: el ángulo de vértice en B al de vértice en Σ, y el de vértice en Ξ al de vértice en T; pero el ángulo T es igual al ángulo N —por opuestos por el vértice—; de manera que el ángulo N es igual al Ξ. Luego el rayo visual BΞ se reflejará hacia M. A la vez, puesto que ΘK es igual a KΛ y puesto que los ángulos de vértice en K son rectos, el ángulo O es igual al Π. Luego, el mismo rayo visual BΞM se refleja hacia P. Por lo mismo también se refleja hacia A, por ser igual el ángulo ZPA al EPM; de manera semejante en las demás demostraciones.

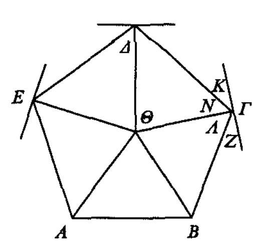
Luego el rayo visual que sale del ojo B ve el punto A mediante los tres espejos planos que hay, ΓΔ, ΔE, EZ.

Proposición 14

También es posible ver lo mismo mediante cuantos espejos planos se dispongan. Pero es preciso componer, de acuerdo con el número de los espejos, un polígono equilátero y equiángulo que tenga dos lados más que espejos.

Sea A lo que ha de verse y B el ojo, y trácese AB y a partir de AB constrúyase un polígono equilátero y equiángulo que tenga dos lados más que espejos y sea el polígono ABΔ y tómese el centro Θ del círculo descrito en torno al po-

lígono, y a partir de él trácense las rectas ΘΓ, ΘΕ, ΘΔ, ΘΒ, ΘΑ hacia los ángulos, y colóquense espejos planos formando ángulos rectos con las rectas trazadas.



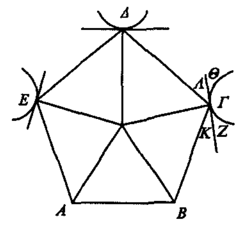
Puesto que el ángulo suma de Ζ, Λ es igual al ángulo suma de Ν, Κ —pues cada uno de ellos es recto— y de ellos, Ν es igual a Λ, entonces el ángulo restante Ζ es igual al Κ. De manera que el rayo reflejado del rayo visual ΒΓ irá hacia Δ, ya que los reflejos se producen en ángulos iguales. Del mismo modo se demostrará también que los ángulos que se forman en los espejos con vértice en los puntos Δ, Ε son iguales.

Luego el rayo visual que sale del ojo Β, al reflejarse e incidir en todos los espejos llegará al punto Α.

Proposición 15

También es posible ver lo mismo mediante espejos convexos y cóncavos.

Sea Α lo que ha de verse y Β el ojo y de la misma manera constrúyase un polígono equilátero y equiángulo ΑΒΓΔΕ y haya en los puntos Γ, Δ, Ε espejos planos desde los que se ve Α, como se ha demostrado [Prop. 14], y a éstos añádanse espejos cóncavos o convexos en los puntos de contacto de los rayos visuales.



Entonces, el ángulo Ζ es igual al Θ, y el Κ al Λ. Luego todo el ángulo ΚΖ es igual al ΘΛ. Lue-

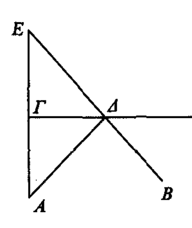
go el rayo visual se reflejará desde el espejo convexo Γ hacia el Δ, y desde el Δ hacia el E, y desde el E hacia el A.

Luego es evidente que es posible ver lo mismo tanto si los espejos son todos convexos o cóncavos como si están mezclados.

Proposición 16

En los espejos planos cada uno de los objetos vistos se ve según la perpendicular desde el objeto visto.

Sea ΓΔ un espejo plano y B el ojo y A el objeto visto y sea AΓ la perpendicular desde el objeto visto al espejo.



Entonces, puesto que se ha supuesto en las «Definiciones»[17] [Def. 4] que si el lugar de Γ está ocupado no se ve A, se verá A en línea recta con AΓ. Y también en línea recta con el rayo visual BΔ; luego se verá en E. Y habíamos supuesto que lo recto es aquello cuya parte media está en línea con los extremos[18]: de manera que AE y BE serán una recta.

Proposición 17

En los espejos convexos cada uno de los objetos vistos se ve según la recta trazada desde el objeto visto hacia el centro de la esfera.

---

[17] Tomamos la lectura *hórois* del manuscrito *m*.

[18] Cf. Def. 1 y nota.

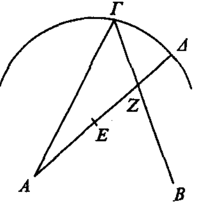
Sea ΓΔ un espejo convexo y B el ojo y BΔ un rayo visual que se refleja hacia A, y sea Z el centro de la esfera y trácese AZ y prolónguese el rayo visual BΔ hacia E.

Entonces, puesto que se había supuesto en las «Definiciones»[19] [Def. 5] que si Γ está ocupado, A no se ve, se verá en línea recta con AΓ en la coincidencia con el rayo visual BΔ y dentro de la recta AΓ, en el punto E, como en los planos.

Proposición 18

En los espejos cóncavos cada uno de los objetos vistos se ve en la recta trazada desde el objeto visto hacia el centro de la esfera.

Sea ΓΔ un espejo cóncavo y BΓ el rayo visual que se refleja hacia el objeto visto, A, y sea E el centro de la esfera y desde A hacia E trácese una recta y prolónguese.



Entonces, puesto que se había supuesto en las «Definiciones»[20] que, si el lugar de Δ está ocupado, no se ve A, ya que aparece en línea recta con AE, se verá en la coincidencia de la recta AΔ y el rayo visual BΓ en el punto Z.

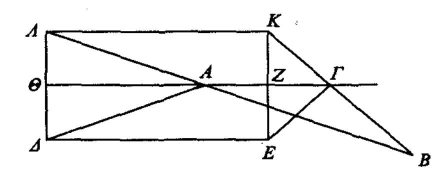
[19] Como en la proposición 16, preferimos la lectura *hórois* del manuscrito *m*.

[20] Como en las proposiciones 16 y 17, preferimos la lectura *hórois* del manuscrito *m*.

PROPOSICIÓN 19

En los espejos planos lo de la derecha aparece a la izquierda y lo de la izquierda a la derecha, y la imagen es igual al objeto visto y la distancia desde el espejo es igual.

Sea ΑΓ un espejo plano y Β el ojo y ΒΑ, ΒΓ los rayos visuales que se reflejan hacia los puntos Ε, Δ y sea ΕΔ el objeto visto, y desde los puntos Ε, Δ trácense las rectas ΕΖ, ΔΘ perpendiculares al espejo y prolónguense; prolónguense también los rayos visuales ΒΓ, ΒΑ y coincidan con las perpendiculares en los puntos Κ, Λ. Y trácese la recta ΛΚ.



Entonces Ε aparece en Κ y Δ en Λ —eso ya se había demostrado [Prop. 16]. Luego lo de la izquierda aparece a la derecha y lo de la derecha a la izquierda. Y puesto que el ángulo ΚΓΖ es igual al ángulo ΖΓΕ y los ángulos con vértice en Ζ son rectos, entonces también la recta ΖΚ sería igual a ΖΕ. Por lo mismo, también ΔΘ es igual a ΘΛ. Luego la distancia que dista ΕΔ del espejo es la misma que la que dista la imagen ΚΛ. Y el objeto visto ΕΔ es igual a la imagen ΚΛ por ser iguales ΕΖ a ΖΚ y ΔΘ a ΘΛ y ser común y estar formando ángulos rectos ΘΖ.

PROPOSICIÓN 20

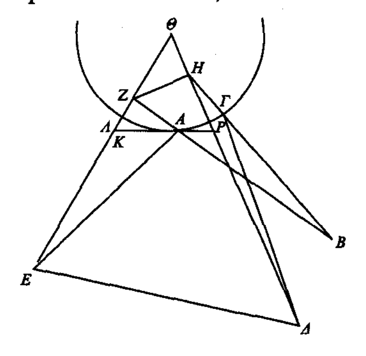
En los espejos convexos lo de la izquierda aparece a la derecha y lo de la derecha a la izquierda y la imagen tiene menor distancia del espejo.

Sea ΑΓ un espejo convexo y Θ el centro de la esfera y B el ojo y BA, BΓ los rayos visuales que se reflejan hacia los puntos Δ, E y sea ΔE el objeto visto y trácense desde el centro Θ hacia Δ, E las rectas ΘΔ, ΘE y prolónguense los rayos visuales hacia Z, H y trácese la imagen ZH.

Entonces Δ aparece en H y E en Z. Luego lo de la derecha aparece a la izquierda y lo de la izquierda a la derecha.

Digo que EΛ es mayor que ΛZ.

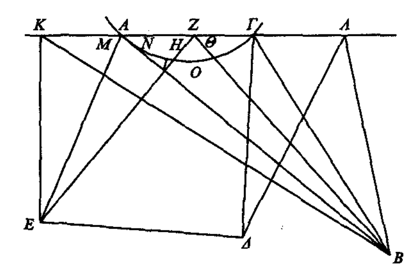
Trácese por el punto A la recta PAK tangente a la circunferencia [*Elem.* III 17]. Puesto que las rectas BA, AE forman ángulos iguales con la circunferencia por la reflexión [Prop. 1] y la recta KAP es tangente, el ángulo comprendido por EAZ resultaría cortado por la mitad; y el ángulo K es obtuso; luego la recta EK es mayor que la recta KZ; y mucho mayor la recta EΛ que la recta ΛZ. Luego la imagen ZH está menos distante del espejo, mientras que el objeto visto EΔ está más distante.



PROPOSICIÓN 21

En los espejos convexos la imagen es menor que los objetos vistos.

Sea ΑΟΓ un espejo convexo, y Β el ojo y ΒΑ, ΒΓ los rayos visuales que se reflejan hacia los puntos Δ, Ε.



Entonces en el espejo convexo se ve ΕΔ en el ángulo comprendido por ΑΒΓ. Póngase al lado el espejo plano ΑΓ que toque a los rayos visuales en Α, Γ. Entonces el rayo visual que va a ver Ε desde el espejo plano no es el rayo ΒΑΕ, pues no forma ángulos iguales con el espejo plano; ni tampoco se reflejará entre los puntos Α, Γ. Pero refléjese, si es posible, y sea el rayo visual ΒΖΕ. Entonces el ángulo Η será igual al ángulo Θ por la reflexión [Prop. 1]. Pero el ángulo Θ es mayor que el ángulo suma de Ν, Ι y el ángulo Μ mayor que Η. De manera que Μ también es mayor que la suma de Ν, Ι: lo cual es imposible, puesto que el propio ángulo Ι es mayor que Μ, pues es igual al ángulo entero con vértice en la circunferencia. Luego se reflejará fuera de Α. Refléjese y sea ΒΚΕ. De manera semejante, también ΒΛΔ caerá fuera. Entonces el objeto ΕΔ se ve en el espejo plano

bajo un ángulo mayor, el comprendido por KBΛ, que en el espejo convexo. Y se había demostrado que la apariencia era igual en el espejo plano [Prop. 19].

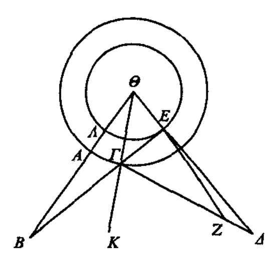
Luego es evidente que en el espejo convexo la imagen aparece menor que el objeto visto.

Proposición 22

En los espejos convexos aparecen menores las imágenes de los espejos menores.

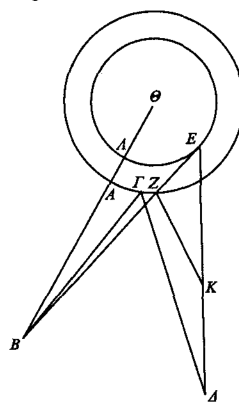
Sea AΓ la esfera mayor y EΛ la esfera menor en torno al mismo centro Θ, y B el ojo y trácese la recta BAΘ y refléjese en la esfera el rayo visual BΓΔ.

Digo que el rayo visual que se refleja en la esfera menor hacia Δ no pasará por Γ ni caerá fuera de Γ.



Pues pase primero, si es posible, por Γ, y refléjese en la esfera menor hacia el punto Δ y sea la recta BEΔ y trácese una recta que una Θ y Γ y prolónguese hacia K. La recta ΘΓK cortará por la mitad el ángulo BΓΔ por formar BΓΔ ángulos iguales con la circunferencia por la reflexión [Prop. 1]. Por lo mismo, la recta que va de Θ a E una vez trazada y prolongada cortará por la mitad el ángulo comprendido por BEΔ. Córtelo y sea la recta ΘEZ. Puesto que el ángulo comprendido por BΓΔ es mayor que el comprendido por BEΔ, también la mitad de la mitad, el ángulo comprendido por BΓK es mayor que el comprendido por BEZ; pero también es menor, lo cual es imposible. Luego el rayo visual reflejado en la esfera menor no pasará por Γ.

Supóngase de nuevo lo mismo y el rayo visual BEΔ al reflejarse en la esfera menor caiga por fuera de Γ y corte la



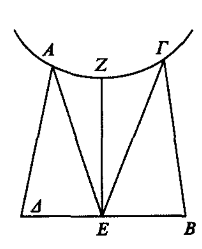
recta BE la esfera mayor en Z. El rayo visual BZK al reflejarse en Z no coincidirá con ΓΔ —eso ya se ha demostrado [Prop. 4]—. Coincida entonces con EΔ en K. Entonces el rayo visual BZK al reflejarse en el espejo mayor ve K y el propio rayo visual BEK al reflejarse en el espejo menor ve el mismo K. Pero eso se había demostrado arriba que era imposible. Luego el rayo visual al reflejarse en el espejo menor hacia Δ caerá entre los puntos Γ, A.

De manera semejante se demostrará también que hace lo mismo el rayo visual de la otra parte. Luego se ve bajo un ángulo menor, el que hay con vértice en B, en el espejo menor que en el mayor [*Óptica*, def. 4].

Luego la imagen aparece menor en el espejo menor.

Proposición 23

En los espejos convexos las imágenes aparecen convexas.



Sea AΓ un espejo convexo y E el ojo y EA, EΓ los rayos visuales que se reflejan hacia Δ, B y ZE un rayo visual que se refleja sobre sí mismo hacia E.

Entonces, de los rayos visuales los más lejanos son los mayores en longitud, mientras que los del centro, como EZ, son

los menores. Luego E parece más próximo al espejo y B y Δ más lejanos.

De manera que todo entero parece convexo.

Proposición 24

En los espejos cóncavos, si se pone el ojo en el centro, sólo aparece el ojo[21].

Sea ΑΓΔ un espejo cóncavo y B su centro y BA, BΓ, BΔ los rayos visuales.

Entonces, el ángulo E es igual al Z. Luego al reflejarse el rayo visual BΓ pasará por B [Prop. 2]. Y lo mismo los restantes rayos visuales.

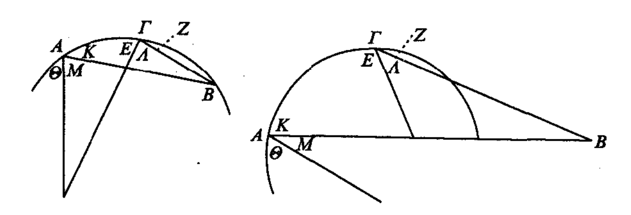
Luego sólo se ve el propio B.

Proposición 25

En los espejos cóncavos, si pones el ojo en la circunferencia o por fuera de la circunferencia no se ve el ojo.

Sea ΑΓΒ un espejo cóncavo y esté el ojo B en la circunferencia de éste e incidan los rayos visuales BA, BΓ y refléjense.

[21] Ver Eecke afirma que esta proposición y las dos siguientes son falsas desde el punto de vista de la anatomía. La proposición 26, además, está probada de modo incorrecto.



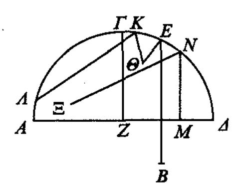
Entonces, el ángulo suma de M, Θ es mayor que el K y el ángulo suma de E, Λ mayor que el Z. De manera que los rayos visuales BA, BΓ no se reflejarán hacia el ojo B: si se reflejaran hacia el ojo, los ángulos de vértice en A, Γ serían iguales.

Y se demostrará que aunque el ojo esté por fuera de la circunferencia ocurre lo mismo, es decir, que el ojo no se ve por no ir hacia él los rayos reflejados.

Proposición 26

En los espejos cóncavos, si sacando el diámetro de la esfera levantas desde el centro una perpendicular y pones el ojo en un extremo, no se verá nada de lo que hay en la parte en la que está el ojo, es decir, ni de lo que esté sobre el diámetro ni de lo que esté por fuera del diámetro.

Sea AΓΔ un espejo cóncavo y sea AΔ el diámetro de la esfera y desde el centro Z levántese perpendicular a AΔ la recta ZΓ y sea B el ojo y BE el rayo visual.



Entonces, BE al reflejarse no irá ni hacia el punto B ni hacia el Z, puesto que se refleja en ángulos iguales; lue-

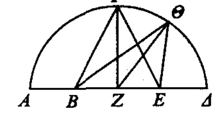
go irá como EΘ. De manera semejante, también si el ojo cae por dentro, en donde Θ, o sobre el diámetro, en M, al reflejarse los rayos visuales ΘK, MN irán como KΛ, NΞ.

Luego no se ve nada de lo que hay en la misma parte en la que está el ojo ni de lo que está sobre el diámetro ni de lo de fuera del diámetro.

Proposición 27

En los espejos cóncavos, si se ponen los ojos sobre el diámetro equidistantes del centro, no se verá ninguno de los dos ojos.

Sea AΓΔ un espejo cóncavo, AΔ el diámetro, Z el centro, ZΓ perpendicular, B, E los ojos equidistantes del centro y BΓ el rayo visual.



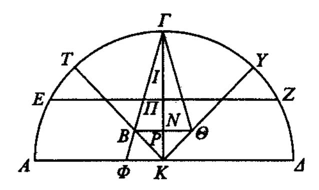
De manera que al reflejarse irá hacia E, puesto que se refleja en ángulos iguales. Ningún otro rayo visual irá al reflejarse desde B hacia E. Pues si fuera, como BΘ, trácense ΘE, ΘZ. Entonces el ángulo BΘE quedará cortado por la mitad por ZΘ, y BΘ será en proporción a ΘE como BZ a ZE [*Elementos* VI 3]: lo cual es imposible, pues BΘ es mayor que ΘE, mientras que BZ es igual a ZE. Por tanto, ningún rayo visual al reflejarse irá de B hacia E. Luego sólo un rayo visual se reflejará hacia cada uno de los ojos B, E y E no se verá. Y es que al ser prolongado el rayo BΓ no coincidirá con BΔ en las partes de Γ, Δ, sino que cada uno de los objetos vistos aparecía sólo en el punto de coincidencia [Prop. 18]. Y tampoco el rayo EΓ coincidirá con EA en las partes de Γ, A, pues en los espejos cóncavos cada uno de los objetos vistos

se ve según la recta trazada desde el objeto visto hasta el centro de la esfera.

Proposición 28

En los espejos cóncavos, si cortando el radio en dos partes iguales y trazando una perpendicular pones los ojos a la misma distancia del radio, y los pones o entre el diámetro y la perpendicular o sobre la propia perpendicular, no se ve ninguno de los ojos.

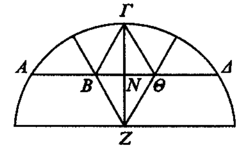
Sea ΑΓΔ un espejo cóncavo, ΑΔ el diámetro, Κ el centro y la perpendicular ΚΓ quede cortada en dos partes iguales por el punto Π y sea perpendicular a ella la recta ΕΠΖ y sean Β, Θ los ojos situados entre el diámetro ΑΔ y la recta ΕΖ en las paralelas ΕΖ, ΒΘ, equidistantes del radio ΚΓ, y sea ΒΓ el rayo visual que se refleja hacia Θ, pues forma ángulos iguales en la circunferencia por ser ΖΕ paralela a ΒΘ e igual ΒΝ a ΝΘ. Y una vez trazadas ΚΒ, ΚΘ prolónguense y prolónguese también ΓΒ hacia Φ.



Y puesto que ΒΓ es mayor que ΒΚ, también el ángulo Ρ es mayor que el ángulo Ι. De manera que también el ángulo comprendido por ΓΒΘ es mayor que el comprendido por ΘΒΚ, es decir, que el comprendido por ΒΘΚ; luego ΒΓ no coincidirá con ΚΘ; luego Θ no se verá, ya que aparece en el punto de coincidencia de ΒΓ, ΚΘ [Prop. 18].

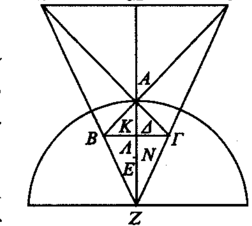
Sea ahora lo mismo que arriba, pero estén situados los ojos Β, Θ sobre la recta que corta perpendicularmente por la mitad al radio, sobre ΑΔ.

Puesto que la recta BΓ es igual a BZ y la recta ΓΘ es igual a ZΘ, BΓ sería paralela a ZΘ [Cf. *Elem.* I 34]; luego el rayo visual BΓ no coincidirá con el radio, es decir, con ZΘ, hacia el objeto visto, hacia las partes de Θ, Γ. De manera que el ojo Θ no aparece, puesto que aparecía en el punto de coincidencia de los rayos BΓ, ZΘ.



Sea de nuevo lo mismo pero estén situados los ojos B, Γ, equidistantes del radio ZA, por encima del punto de corte del radio en dos partes iguales.

Digo que aparecen los ojos B, Γ y lo de la derecha a la izquierda y lo de la izquierda a la derecha y la imagen mayor que el rostro y la imagen a mayor distancia del espejo.

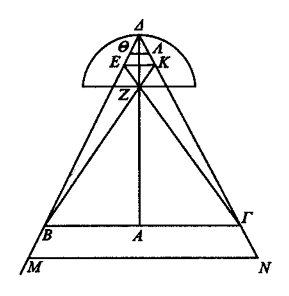


Sea BA el rayo visual que se refleja y trácense desde el centro Z hacia los puntos B, Γ las rectas ZB, ZΓ y prolónguese BA.

Puesto que el punto de corte en dos partes iguales es N, BZ es mayor que BA, y el ángulo K es mayor que el E. Y el ángulo K es igual al Δ; luego el ángulo Δ es mayor que el E. Luego, una vez prolongadas ZB, ΓA, coincidirán. Coincidan en el punto Π. Por la misma razón también BA, ZΓ coincidirán en el punto Θ. Luego Γ se verá en Θ y B en Π, y aparece lo de la derecha a la izquierda y lo de la izquierda a la derecha; y en efecto, ΘΠ es mayor que BΓ, pues son paralelas. Luego la imagen aparece mayor y a mayor distancia del espejo, pues MA es mayor que AΛ.

Y si se ponen los ojos fuera del diámetro, lo de la derecha aparece a la derecha y lo de la izquierda a la izquierda y la imagen menor que el rostro y entre el rostro y el espejo.

Sean Β, Γ los ojos y Ζ el centro del espejo y sea ΑΖΔ una perpendicular al diámetro y ΒΓ una perpendicular a ella, y sea ΑΓ igual a ΒΑ y sea ΒΔ el rayo visual que se refleja hacia Γ y trácense las rectas ΒΖΚ, ΓΖΕ pasando por el centro y una la recta ΕΚ los puntos Ε, Κ.



Por consiguiente, Β aparece en Κ y Γ en Ε. Luego lo de la derecha aparece a la derecha y lo de la izquierda a la izquierda y la imagen ΕΚ menor que el rostro ΒΓ, pues ΕΚ es paralela a ΒΓ. Y la imagen aparece entre el espejo y el rostro.

Y si se mueve hacia atrás el rostro, la imagen aparece aún menor.

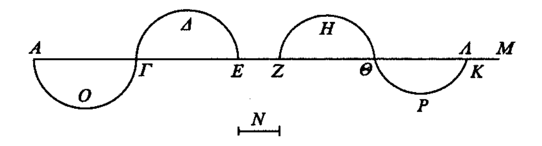
Sea ΜΝ el mismo rostro que ΒΓ, pero distante de ΒΓ, situado de manera semejante.

La recta trazada desde Μ hasta el centro Ζ y prolongada caerá más allá de Κ, como Λ, y la recta que va de Ν a Ζ caerá más allá de Ε, como Θ. Luego ΜΝ aparece como ΘΛ; y ΘΛ es menor que ΕΚ y está más próxima al espejo.

Proposición 29

Es posible disponer un espejo de manera que en el mismo aparezcan muchos rostros, unos mayores, otros menores y unos más cerca, otros más lejos y de unos, lo de la derecha a la derecha y lo de la izquierda a la izquierda y de otros lo de la izquierda a la derecha y lo de la derecha a la izquierda.

Sea pues AM un plano. Entonces en él estarían espejos convexos como ΑΟΓ, ΘΡΚ; cóncavos como ΓΔΕ, ΖΗΘ; planos como ΕΖ, ΑΜ.

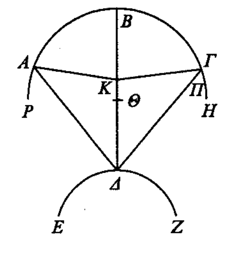


Al colocar el rostro en donde N, de los espejos planos aparecen las imágenes iguales y a la misma distancia [Prop. 9 y 19]; de los convexos, menores y a menor distancia [Prop. 20 y 21]; de los cóncavos, de todas las maneras [Prop. 28], como se ha demostrado.

Proposición 30

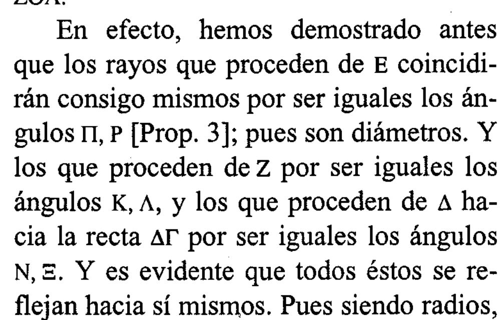
De los espejos cóncavos puestos frente al sol se enciende fuego.

Sea ΑΒΓ un espejo cóncavo y ΕΖ el sol y Θ el centro del espejo, y trazada ΔΘ desde un punto Δ hacia el centro Θ prolónguese hacia B, e incida el rayo ΔΓ y refléjese hacia K. Entonces se reflejará por encima del centro K, pues el ángulo Π de vértice en la circunferencia es menor que el ángulo restante de vértice en la circunferencia comprendido por ΒΓΔ. Y sea el arco de circunferencia AB igual al ΒΓ, y desde Δ incida otro rayo, ΔΑ. Así, es evidente que al reflejarse el rayo ΑΔ caerá sobre K por ser igual el arco de circunferencia AB al ΒΓ. De la misma manera se demostrará que todos los rayos que parten



de Δ e inciden en el espejo y comprenden arcos de circunferencia iguales coincidirán con BΘ en el mismo punto por encima de Θ.

Sea de nuevo ABΓ un espejo cóncavo y ΔEZ el sol y sea la recta EΘB desde un punto E pasando por el centro Θ, y desde otros puntos Δ, Z sean las rectas ΔΘΓ, ZΘA.



En efecto, hemos demostrado antes que los rayos que proceden de E coincidirán consigo mismos por ser iguales los ángulos Π, P [Prop. 3]; pues son diámetros. Y los que proceden de Z por ser iguales los ángulos K, Λ, y los que proceden de Δ hacia la recta ΔΓ por ser iguales los ángulos N, Ξ. Y es evidente que todos éstos se reflejan hacia sí mismos. Pues siendo radios, forman semicírculos y los ángulos de los semicírculos son iguales; y los rayos reflejados se producen mediante ángulos iguales; entonces, se reflejan sobre sí mismos. Luego desde todos los puntos coincidirán todos los rayos hacia los rayos que pasan por el centro y están en el centro.

Luego al calentarse estos rayos en torno al centro se reúne el fuego; de manera que si se pone allí una estopa, se encenderá.

EUCLIDES

FENÓMENOS

INTRODUCCIÓN

LA ASTRONOMÍA GRIEGA ANTIGUA

La astronomía es, junto con la matemática pura, el terreno científico en el que los logros de la Antigüedad griega han alcanzado mayor pervivencia. Sus contribuciones fueron especialmente destacadas en los ámbitos de la mejora de las mediciones astronómicas, el desarrollo de los modelos geométricos para la explicación de los movimientos estelares y el cálculo de las dimensiones cósmicas. En el primero de estos terrenos los griegos no fueron más que continuadores de babilonios y egipcios, pero en los otros dos abrieron caminos que conducirían a avances más ambiciosos [1]. En el siglo II, Ptolomeo compiló en su *Almagesto* el conjunto de los conocimientos alcanzados en esta materia; este trabajo, que mantuvo su vigencia hasta el siglo XVII, no fue, sin embargo, obra de la genialidad de su autor, sino resultado de un proceso en el que a lo largo de un milenio se conjugaron la observación y las hipótesis nacidas de la intuición. Con ello contrastan los textos más antiguos, los de Homero y

[1] S. SAMBURSKY, *El mundo físico de los griegos*, pág. 73.

Hesíodo, que nos ofrecen la imagen de una Tierra plana, flotando en el Océano en el que los astros «se bañan» (*Ilíada* V 6; XVIII 489) cuando no están a la vista en el cielo. Los poemas apenas dan nombre a una docena de cuerpos celestes aparte del sol y la luna; de los planetas, a los que no distinguían de las estrellas, sólo reconocían a Venus bajo las formas de Lucero del alba y Lucero del atardecer, aunque no parece que fueran conscientes de que bajo ambos nombres se referían al mismo cuerpo celeste.

Por entonces los babilonios observaban el cielo en la idea de que lo que ocurre en el firmamento es un signo de lo que ha de suceder en la tierra: igual que la presencia de determinadas constelaciones trae consigo el cambio de las estaciones, así también la existencia de una persona vendrá marcada por el astro que salga en el momento de su nacimiento; otras determinadas conjunciones astrales indicarán los percances que pueden alcanzar al rey, quien ha de estar preparado para hacerles frente. Los calendarios babilonios utilizaban para el cómputo del tiempo los meses lunares, cuyo primer día era señalado por la primera aparición del creciente tras la luna nueva. Como el cielo no siempre es directamente observable y los fenómenos se repiten, poder calcularlos ofrece a los seres humanos una forma de dominio y previsión del futuro. Para ello los babilonios contaban con sus observaciones y con conocimientos aritméticos suficientes para poder elaborar tablas de aparición de cada nuevo creciente, de las estaciones y retrogradaciones de algunos planetas y para calcular las conjunciones del sol y la luna, lo que les permitía predecir los eclipses lunares[2].

[2] Sí podían saber cuándo cabía que se produjera un eclipse de sol, habida cuenta de las posiciones del sol y la luna, pero no podían predecirlos con exactitud porque para ello hubieran necesitado conocer, entre otras

Los conocimientos astronómicos de los babilonios se nos han conservado gracias a tablillas en escritura cuneiforme que fueron convenientemente leídas e interpretadas por los estudiosos de principios del siglo XX. Incluso contando con esos trabajos, siguen planteándonos problemas que dificultan su valoración: uno de ellos es que las tablas astronómicas no siempre son fruto de la observación, sino que a veces son cálculos realizados con aproximaciones —no siempre exactas— o, incluso, pueden ser copia de tablas antiguas procedentes no de la observación sino del cálculo; el otro problema es que no van fechadas ni acompañadas de ninguna clase de explicación teórica previa o comentario[3].

Los babilonios, no obstante su superioridad en las observaciones y en los cálculos, se contentaban con la anotación y previsión de los fenómenos, sin intentar jamás explicarlos o elaborar hipótesis relativas al conjunto del mundo. Aún así, su influencia fue determinante, pues de ellos procede la medida sexagesimal para la esfera celeste y el conocimiento de las constelaciones que forman el zodíaco.

También los egipcios poseían unos conocimientos muy superiores a los de los griegos en materia astronómica: textos del siglo XIII a. C. enumeran cuarenta y tres constelaciones, y en la primera mitad del siglo V a. C., según nos informa Heródoto, tenían establecida la duración del año en

---

cosas, los tamaños auténticos de la tierra, el sol y la luna, y no disponían de esos datos.

[3] La fama de buenos astrónomos que acompañaba a los caldeos llevó a exageraciones como la de Simplicio, que afirma que los babilonios disponían de observaciones de las estrellas a lo largo de 1.444.000 años. Más verosímil es la afirmación de Ptolomeo de que los babilonios disponían de observaciones sistemáticas ininterrumpidas desde el reinado de Nabonasar (747-735 a. C.).

365 días. Es difícil probar su influencia en el desarrollo de la astronomía griega, pero es innegable que las relaciones se produjeron aunque no sepamos aún cuáles fueron los canales de contacto[4].

Entre tanto, en el mundo de habla griega tiene lugar el nacimiento del pensamiento lógico, que sería germen de la filosofía y las ciencias. Este período, al que podríamos llamar de la «protociencia astronómica griega», abarca, *grosso modo,* los siglos VI-V a. C. y concluye con el nacimiento de la astronomía matemática propiamente dicha, al separarse definitivamente esta ciencia del terreno de lo relativo a la *phýsis* para pasar a formar parte de la matemática aplicada. Estos dos siglos serán testigos de las inquietudes astronómicas y cosmográficas de casi todos los pensadores destacados, y veremos entremezclarse los avances en la observación de los fenómenos con la elaboración de hipótesis generales, más o menos arriesgadas, imposibles de contrastar con la realidad utilizando los medios entonces existentes.

En ese tiempo, Tales predijo —probablemente contando con la ayuda de los conocimientos caldeos— el eclipse del 28 de mayo de 585 a. C.[5], Anaximandro (610-540 a. C.) descubrió la oblicuidad de la eclíptica, Anaxímenes *(fl.* 546

[4] Cf. L. GIL, «Ex Aegypto lux: *Il.* 22, 25-32», *Quaderni Urbinati di Cultura Classica,* N. S. 61 (1999), 35-42.

[5] No cabe pensar que pudo hacer tal predicción sin contar previamente con tablas astronómicas. Como en esta época los griegos no disponían de colecciones de observaciones, es de suponer que se apoyó en materiales babilonios. En cuanto a la veracidad de la anécdota, como hemos indicado algo más atrás, ni siquiera los babilonios estuvieron en situación de predecir, *stricto sensu,* los eclipses de sol, sino, simplemente, avisar de cuándo podía producirse. Hace ya más de un siglo que los astrónomos y los historiadores de la ciencia coinciden en afirmar que el acierto en la predicción, si en efecto se produjo, fue en parte fruto del azar.

aprox.) distinguió entre las estrellas «fijadas como clavos» en el firmamento y los planetas, «errantes». A Pitágoras (segunda mitad del siglo VI a. C.) y su escuela les debemos el concepto de que, siendo la esfera la forma más perfecta, esa debía ser también la forma del mundo[6]. Quizá esta idea naciera del misticismo siempre presente en la secta y fuera, poco a poco, encontrando confirmaciones en la observación. A Parménides (n. 515 a. C. aprox.) se le atribuye el descubrimiento de la forma esférica de la Tierra y el de que el Lucero de la mañana y el del atardecer son el mismo astro.

De Anaxágoras (500-428 a. C.) se contaba como anécdota que cuando le preguntaron sobre la finalidad de haber nacido respondió: «Para investigar el sol, la luna y las estrellas». Para él, los astros son «piedras al rojo vivo que son movidas en círculo por la revolución del éter»; la luna recibe su luz del sol y se eclipsa cuando queda bajo la sombra de la tierra; los eclipses de sol se producen cuando la luna se interpone entre la tierra y el sol. A la vez sostiene que la tierra es plana y que se mantiene suspendida a causa de su tamaño y porque el aire, que es muy fuerte, soporta su peso.

---

[6] Aristóteles describe así las opiniones de los pitagóricos: «la mayoría de los que afirman que el cielo es limitado dicen que ⟨la tierra⟩ se halla en el centro, pero los llamados pitagóricos, de Italia, se manifiestan en contra: en efecto, afirman que en el centro hay fuego, y que la tierra, que es uno de los astros, al desplazarse en círculo alrededor del centro, produce la noche y el día. Además postulan otra tierra opuesta a ésta, que designan con el nombre de Antitierra, no buscando argumentos y causas conformes a las apariencias, sino forzando las apariencias e intentando compaginarlas con ciertos argumentos y opiniones suyos» (*Acerca del cielo* II 13, 293a18-26; en el libro II de este escrito trata diversas cuestiones de detalle sobre la cosmografía pitagórica). Citamos la traducción de M. Candel en esta misma colección, vol. 229.

Platón (429-347 a. C.) concede gran importancia a esta ciencia[7], cuyo estudio formaba parte de la educación que debían recibir los filósofos-gobernantes de su *República,* porque «en estos conocimientos se purifica y reanima algún órgano del alma» *(Rep.* VII 527 d7). En el pensamiento astronómico de Platón vemos que aparecen mezclados elementos procedentes de las teorías pitagóricas, rasgos característicos de la propia filosofía platónica e informaciones derivadas de las observaciones de los astrónomos; esos conocimientos —dice— proceden de Egipto y Siria y, sentado el principio de que todo lo que los griegos reciben de los bárbaros lo llevan a la perfección, lo mismo ocurrirá en esta materia. El medio para llevarlo a cabo será aplicar a ese estudio el número y la ciencia del número y servirse de problemas, como en la geometría *(Rep.* VII 530b). El objetivo buscado será «salvar los fenómenos», es decir, imaginar un sistema ordenado geométricamente que pueda dar cuenta de los movimientos aparentemente desordenados de ciertos cuerpos celestes.

Eudoxo (390-340 a. C. aprox.) fue el primero en obedecer el mandato platónico cuando concibió, en una obra de elevado nivel matemático, la ordenación del universo como un sistema de esferas homocéntricas cuyos movimientos al girar en torno a ejes diferentes debían explicar las estaciones y retrogradaciones de los planetas. Los datos observaciona-

---

[7] Platón se refiere a la astronomía en *Timeo* 30c-40d (donde se contiene la exposición más completa de sus puntos de vista astronómicos), *República* X 614b-621d y *Leyes* VII 821b-822c. Al leer esos textos hemos de tener presente que no se trata de textos puramente científicos, sino literarios, y que en ellos aparecen elementos poéticos y mitológicos que, formando parte del pensamiento platónico, no pretenden ofrecer ni una visión general ni una presentación ordenada de los conocimientos científicos de la época.

les con que contaba eran escasos, lo que le llevó a resultados erróneos fácilmente perceptibles; sus hipótesis fueron perfeccionadas por Calipo *(fl.* 330 a. C.) que fue, además, autor de los cálculos que situaban la duración del año en 365 1/4 días[8].

En cuanto a Aristóteles (384-322 a. C.), «sus servicios a la astronomía consisten sobre todo en críticas perspicaces, generalmente destructivas, de las opiniones sostenidas por los astrónomos anteriores»[9]. Basándose en observaciones inmediatas, Aristóteles imaginó un universo finito, único y eterno de forma esférica y supuso en él un movimiento circular —opuesto al movimiento natural, rectilíneo, característico de los cuatro elementos terrestres (fuego, tierra, aire y agua)—. El movimiento circular correspondía a un quinto elemento, el éter. En el universo coexisten un mundo sublunar, sometido a movimientos imperfectos y limitados (arriba y abajo, generación y corrupción), y un mundo supralunar en el que se produce sólo el movimiento circular perfecto y

[8] La cuestión se había suscitado ya entre los astrónomos babilonios en el sentido de encontrar un período que contuviera simultáneamente un número completo de días (revoluciones de la esfera de las fijas), meses (revoluciones lunares) y años (revoluciones solares). El interés del asunto radica en que el cómputo lunar, al no coincidir con el cómputo solar, hace que en poco tiempo el calendario se desajuste y los mismos meses lunares dejen de pertenecer a las mismas estaciones del año. El lector interesado encontrará el asunto expuesto de modo claro y detallado en GÉMINO, *Introducción a los fenómenos*, cap. VIII, publicado en esta misma colección, vol. 178.

[9] HEATH, *Greek Astronomy*, págs. XLVI-XLVII. Las aportaciones del Estagirita aparecen dispersas en sus tratados, pero la *Física*, el *Sobre el cielo* y la *Metafísica* son las obras en las que más referencias a este asunto encontramos.

eterno. El centro inmóvil del universo esférico en movimiento sería la tierra[10], esférica también.

Intentó también él perfeccionar el sistema de esferas homocéntricas, ampliando el número de las mismas hasta cincuenta y cinco, e introdujo, además, un cambio sustancial: el modelo había sido concebido por Eudoxo como una representación geométrica que ofrecía una solución al mandato platónico de «salvar los fenómenos», pero Aristóteles transformó las esferas geométricas en cuerpos físicos, en esferas materiales concéntricas unidas entre sí. De manera que pasaron de ser una mera ayuda geométrica a ser concebidas como realidades físicas y tomadas por una auténtica reproducción real del cosmos, con lo que el nuevo modelo no sólo se correspondía más exactamente con los hechos observados, sino que también armonizaba mejor con las teorías del propio Aristóteles[11]. Sus aportaciones, como vemos, están más en el terreno de la *phýsis* que en el de lo matemático o las observaciones concretas.

Casi contemporáneo suyo fue Heraclides Póntico (388-315 a. C.), autor de teorías revolucionarias para su época: sugirió que la alternancia de la noche y el día se debía al giro de la tierra en torno a su propio eje, y que Mercurio y Venus no giran en torno a la tierra, sino en epiciclos en torno al sol como satélites suyos. Esta teoría semiheliocéntrica fue perfeccionada por Aristarco, el Copérnico de la Antí-

[10] Esto es, en brevísimo resumen, lo que Aristóteles sostiene en el *Acerca del cielo,* pero se ha de recordar que los puntos de vista aristotélicos sobre los movimientos celestes variaron a lo largo de su vida. Puede consultarse la Introducción a ese tratado preparada por M. CANDEL para esta misma colección (núm. 229) y la bibliografía que allí se menciona.

[11] Cf. S. SAMBURSKY, *El mundo físico de los griegos,* págs. 84-85.

güedad (primera mitad del s. III a. C.)[12]. Las contradicciones de estas hipótesis con las de Platón y Aristóteles y con los datos de los sentidos, impidieron prácticamente su repercusión; incluso grandes matemáticos y astrónomos como Arquímedes, Apolonio e Hiparco consideraron que la hipótesis geocéntrica era más apta para «salvar los fenómenos».

LA ASTRONOMÍA MATEMÁTICA

De acuerdo con Platón (*Rep.* 528a9), ya en la primera mitad del siglo IV a. C. se sostenía el parecer de que la astronomía era una parte de la matemática, como estudio de «lo sólido en movimiento». Las hipótesis de la esfericidad del universo facilitaban el tratamiento geométrico de los asuntos astronómicos, ya que una vez que se definen puntos, líneas y movimientos de la esfera, estos conceptos son fácilmente asimilables con los presupuestos cosmológicos descritos.

Eudoxo había desarrollado ese planteamiento, pero sus hipótesis chocaron contra la evidencia de fenómenos bien conocidos que no obtenían explicación mediante el sistema de esferas homocéntricas. Sosígenes afirma que tanto Eudoxo como el propio Aristóteles, despreciaron esas dificultades como imperceptibles, y «ninguno de ellos hasta Autólico de Pitane intentó demostrarlo mediante hipótesis». De Autólico (segunda mitad del IV a. C.) se nos han conservado

---

[12] Aunque lo que en nuestro tiempo ha concedido su renombre a Aristarco haya sido la anticipación del sistema copernicano, sólo conocemos esa hpótesis suya por una referencia de Arquímedes; de su obra poseemos nada más un breve tratado *Sobre los tamaños y las distancias del Sol y la Luna.*

dos tratados: el *Sobre la esfera en movimiento* y los dos libros de *Sobre los ortos y los ocasos*[13], que son los textos matemáticos griegos completos más antiguos que han llegado hasta nosotros. En ellos se contienen investigaciones en materia de esférica y de aplicación de la misma a la resolución de problemas astronómicos, y los *Fenómenos* de Euclides están muy próximos a ellos tanto en el tiempo como en el contenido y en los presupuestos matemáticos y astronómicos.

A pesar del avance que suponía la aplicación de modelos matemáticos, estos estudios soportaban el lastre de un defecto común: siguiendo la más pura tradición geométrica, no recurrían a las mediciones. Efectivamente, la geometría griega rechazaba las cifras, y esta característica suele resaltarse mencionando que en los *Elementos* de Euclides no aparecen más números que los que sirven para ordenar los teoremas; la astronomía griega, nacida como una parte de la geometría, restringió durante mucho tiempo los datos numéricos a la medición del tiempo de los períodos de revolución y al cálculo de las dimensiones del universo. Sólo el conocimiento de la trigonometría, cuyo estudio aparece por primera vez en las *Esféricas* de Menelao (ss. I-II d. C.), facilitaría las mediciones que debían permitir reconstruir los movimientos de los astros. Una generación después, Ptolomeo disponía ya del necesario bagaje matemático y observacional para emprender la composición de su *Almagesto* en el que recopilando, mejorando y corrigiendo dio orden y forma a los conocimientos de sus predecesores.

---

[13] Recientemente se ha comprobado que los dos libros son, en realidad, dos redacciones distintas de un único tratado original.

LOS *FENÓMENOS* DE EUCLIDES

Al aproximarnos a los *Fenómenos,* hemos de recordar cuántas veces en la historia de la ciencia una obra maestra ha sumido en el olvido los trabajos que la precedieron. Así sucedió con los *Elementos* anteriores a los de Euclides, los estudios sobre cónicas anteriores a Apolonio o las obras astronómicas de Eudoxo, Apolonio o Hiparco. En ese sentido, la conservación de los *Fenómenos* no sólo es para nosotros un importante testimonio sobre la primera astronomía matemática, sino también signo de que la obra mantenía su interés en el tema específico de que se ocupaba, a saber: la comparación de los tiempos de levante y puesta de los arcos de la eclíptica y las bases geométricas para el estudio de esta cuestión.

Los *Fenómenos* no son una obra fácil. Así lo demuestra la lentitud con que han avanzado los intentos de comentarla, tanto desde el punto de vista externo como interno, puesto que los diversos autores, aun aportando siempre datos o reflexiones nuevas, no habían ofrecido hasta hace bien poco, una interpretación que permitiera comprender plenamente la coherencia interna del tratado y su relación con los tratados matemáticos y astronómicos de sus contemporáneos.

Tal vez por eso en los dos últimos siglos los *Fenómenos* han sido objeto de críticas sumamente desfavorables —más demoledoras en el tono que en la argumentación—, sobre todo por parte de los historiadores de la astronomía.

Delambre califica sus teoremas como pertenecientes a la «metafísica de la astronomía esférica» [14] y Neugebauer, refi-

[14] J. B. J. Delambre, *Histoire de l'astronomie ancienne,* tomo I, pág. 56.

riéndose a los trabajos de esférica de Autólico, Euclides y Teodosio, los considera «un compendio de geometría elemental esférica y aplicaciones astronómicas. Su pedantería e insipidez los caracterizan como libros de texto favorecidos... Imitan el estilo del rigor euclidiano, aunque raramente mencionan sus auténticos presupuestos y las pruebas no son frecuentemente mucho más que una formulación ligeramente distinta de los asertos... Así, es el interés de los maestros de escuela lo que nos ha conservado los restos de los tratados primitivos que de otro modo no hubieran dejado huella. Ptolomeo, por ejemplo, no menciona nunca estos tratados en ninguna de sus obras, simplemente porque tanto sus contenidos como su metodología eran completamente inútiles para la astronomía de su tiempo. El que Papo, en el siglo IV, se ocupe seriamente de completar ciertos teoremas de Autólico no hace más que caracterizar el declive del nivel científico»[15].

Opiniones extremas que, a pesar del relieve de quienes las sostenían, no han alcanzado unánime aprobación. Gino Loria, por ejemplo, matiza la opinión mencionada de Delambre diciendo: «parece exageración afirmar que en la práctica no derive de éstos [los teoremas de los *Fenómenos*] ninguna utilidad; si estos teoremas no suministran el medio para obtener alguna medida, ponen, sin embargo, los elementos para una descripción racional de los fenómenos astronómicos»[16].

Los filólogos, además de contribuir a la conservación y fijación del texto han aportado al análisis de la obra precedentes y paralelos. El siglo pasado ya se había observado

---

[15] O. NEUGEBAUER, *History of the Ancient Mathematical Astronomy*, vol. II, pág. 749.

[16] G. LORIA, *Le scienze esatte nell'antica Grecia*, pág. 503.

que el tratado *Sobre la esfera en movimiento,* de Autólico, y los *Fenómenos* presentaban importantes coincidencias, que se explicaban como resultado de una tradición previa conocida de ambos. Algunos autores, como Tannery, Heiberg y Heath, llegaron a suponer que existió alguna especie de «manual» que recogía esa tradición; suponían asimismo que ese manual estaba en la base de las *Esféricas* de Teodosio, que sería una versión ampliada y reordenada del mismo; Hultsch y Tannery, incluso, proponían a Eudoxo como autor del supuesto tratado. Loria, siempre prudente, admitía la existencia de una obra de esas características, pero argüía que consideraba «bastante peligroso el sistema de atribuir una obra de autor desconocido, perteneciente a determinado país en determinada época, al único hombre de ciencia, nacido en ese tiempo en esa tierra, al que se considera capaz de concebirla» [17].

Pese a los estudios de carácter externo, la parquedad de las opiniones de los filólogos a propósito de la obra ponía de relieve la dificultad de alcanzar la perspectiva matemática y astronómica necesaria para llegar al fondo del asunto. Heiberg, que no ofrece juicio alguno sobre la obra, la resumía en apenas cuatro líneas: «a partir de la suposición de que todas las estrellas fijas están sujetas en *una* esfera, cuyo polo es la estrella polar y su centro la Tierra, se exponen los movimientos de los círculos principales, horizonte, meridianos,

[17] La crítica de NEUGEBAUER es mucho más tajante, pero menos argumentada: «Se ha desplegado mucha ingenuidad para establecer los contenidos de una 'esférica' preeuclidiana...; sugerir como autor a Eudoxo no hace sino más endeble el argumento... No niego que es bastante obvio que los de Euclides y Autólico no fueron los primeros estudios de geometría esférica, pero me parece inútil postular la existencia de una obra precisa... Creo que ya es hora de olvidar la búsqueda de precedentes.»

trópicos, zodíaco y sus partes»[18]; Heath ni siquiera nos da indicios del contenido.

En realidad, tampoco los astrónomos eran capaces de ofrecer un resumen de la obra. Los canadienses Berggren y Thomas, los más recientes traductores y analistas del tratado, ofrecen —por primera vez, a mi entender— una explicación comprensiva del mismo. Según estos autores, los *Fenómenos* están en relación con una de las cuestiones clásicas de la astronomía griega, la comparación de los tiempos de levante y puesta de los arcos de la eclíptica, cuestión que, a su vez, formaba parte del problema clásico de hallar la fórmula para calcular los tiempos de insolación —es decir, el número de horas de luz— que corresponden a los distintos lugares geográficos en las distintas épocas del año.

Neugebauer había señalado[19] la existencia de datos relativos a dos métodos distintos de resolución de este problema; el primero, testimoniado en un papiro egipcio del s. XII a. C., se basa en la observación del máximo y el mínimo anual de insolación y distribuye aritméticamente la diferencia; el segundo, de origen babilonio, calcula la insolación diaria sumando los tiempos de levante de cada grado de la eclíptica, aunque «estos tiempos de levante (o 'ascensiones oblicuas') no se obtuvieron como resultado de cuidadas observaciones o de deducciones matemáticas, sino que fueron elegidos de modo que concordaran con progresiones aritméticas con la condición de que las medidas extremas admitidas para un semicírculo debían coincidir con la razón adoptada entre la máxima y la mínima insolación, la de 3:2.»

---

[18] *Geschichte...*, pág. 54. En sus *Literargeschichtliche Studien...*, págs. 41-51, hace hincapié sobre todo en el estudio de los paralelismos con Autólico y cuestiones relacionadas con la pureza del texto.

[19] HAMA, vol. 2, págs. 706-33.

Para Berggren y Thomas, «Euclides conocía estas antiguas aproximaciones aritméticas... y uno de sus propósitos al escribir los *Fenómenos* era demostrar geométricamente las bases en las que se apoyaba este método aritmético», y más de la mitad del tratado, las proposiciones 7-18, están dedicadas a estudiar cuándo se levantan los arcos de la eclíptica y cuánto tardan en levantarse.

Uno sigue preguntándose, de todos modos, por qué se hace tan difícil resumir el tema de los *Fenómenos* y por qué ha tenido tan malas críticas. A mi entender, la respuesta quizá se halle en el análisis del método del autor de los *Fenómenos*. Ciertamente, es muy distinto del método de los *Elementos*. Las dos obras difieren en ciertos aspectos externos, como la ausencia de definiciones y postulados en los *Fenómenos*, o la ausencia de un prólogo en los *Elementos*, pero también en que los *Elementos* presentan un método rigurosamente deductivo mientras que en los *Fenómenos* se mezclan dos clases de proposiciones.

Al primer tipo pertenecen algunas que son propiamente «demostraciones matemáticas», razonamientos deductivos que, partiendo de unos presupuestos dados, demuestran la veracidad de tesis propuestas. Entre ellas se encuentra, por ejemplo, la proposición 2: «En una circunvolución del mundo, el círculo que pasa por los polos de la esfera será dos veces perpendicular al horizonte; y el círculo del zodíaco será dos veces perpendicular al meridiano, pero nunca al horizonte cuando el cénit esté entre el polo de verano y el polo visible» ya que esa afirmación puede, efectivamente, deducirse de las definiciones de esfera, zodíaco, horizonte, etc. También pertenece a este tipo la proposición 6, «Los astros que están diametralmente opuestos en el círculo del zodíaco se levantan y se ponen por parejas. Y lo mismo los que están en el ecuador»: si en vez de referirnos a estrellas nos re-

ferimos a puntos en una esfera que gira uniformemente en torno a su centro, sería igualmente cierto en geometría de la esfera.

En el segundo tipo encontramos proposiciones que, aun cuando guardan cierta apariencia de fidelidad al método deductivo, trabajan, en realidad, exactamente al revés. Los presupuestos no son afirmaciones evidentes, sino hipótesis pendientes de verificación que pretenden tomar el lugar de los presupuestos; las tesis no son afirmaciones cuya veracidad se puede deducir, sino que el lugar de las tesis lo ocupa el enunciado de hechos conocidos mediante la observación. A este tipo pertenece, de modo muy evidente, la proposición 1, «La tierra está en medio del mundo y ocupa la posición del centro en relación con el mundo»: partiendo del supuesto de que el mundo es esférico, se «deduce» que tiene un centro y, habiendo realizado observaciones con la dioptra que parecen indicar que el observador se encuentra en el centro, se propone esa observación como tesis. También en la proposición 3, «Cada uno de los astros no errantes que hacen levantes y ponientes se levanta y se pone en el mismo punto del horizonte», la tesis propuesta es, en realidad, un hecho observado de propiedades coincidentes con las de los puntos de una esfera sometida a un movimiento giratorio uniforme.

En otras ocasiones ocurre que el autor de los *Fenómenos* trabaja forzando las apariencias. Así lo vemos en la proposición 12: «Los arcos iguales del semicírculo posterior a Cáncer se ponen en tiempos desiguales: en más tiempo los arcos que están junto a los puntos de contacto de los trópicos, en menos los inmediatos a éstos, y en los tiempos más breves los de junto al ecuador; y en igual tiempo los que distan lo mismo del ecuador [se levantan y se ponen]». La versión del tratado que cita Papo, más antigua que las de

nuestros manuscritos, no contiene las palabras entre corchetes, y el comentario de Papo sigue[20]: «La cuestión es por qué habla de las puestas de estos arcos y nunca de sus levantes». La respuesta, como indica Heiberg, reside en que ese teorema de esférica es válido para las puestas, pero no para los levantes, que se efectúan en otros tiempos, como más adelante haría ver Hiparco y como probablemente ya tenían observado los astrónomos contemporáneos de Euclides: de manera que de las observaciones toma las que puede presentar como tesis de una proposición. Una actitud verdaderamente científica hubiera debido llevarle a rechazar la hipótesis del geocentrismo... pero ni Euclides en el siglo III a. C. ni Ptolomeo en el II d. C. ni ningún otro astrónomo hasta Galileo y Copérnico se atrevieron a dar ese paso.

Que el texto que tenemos no son los *ipsissima verba* euclidianos, lo demuestra el hecho de que en tiempos de Papo se conociera otra versión. Por otro lado, hay toda una tradición antigua (Galeno, Papo, Juan Filópono, Teodoro Metoquita) que atribuye una obra con ese título a Euclides. Stamatis, el último editor de Euclides, no cree que esta obra se le pueda atribuir, y Berggren y Thomas se mantienen en una postura ambigua, al no encontrar pruebas definitivas de la autoría ni argumentos evidentes para denegarla. Dado que no hay ningún argumento de peso contra la autoría euclidiana, nos queda como argumento positivo en su favor el peso de la tradición que acabamos de mencionar. Contra esto se ha esgrimido la gran diferencia de calidad y nivel matemático entre los *Elementos* y los *Fenómenos*. Pero lo que en los *Elementos* era una genial labor recopiladora y ordenadora

[20] PAPO, *Synagogḗ* VI, págs. 598, 21 y ss. El uso de esta y otras citas de Papo como argumento en la tarea de fijación del texto de los *Fenómenos* puede verse en HEIBERG, *Literargeschichtliche Studien...*, págs. 46-50.

no podía actuar en el terreno, apenas hollado por entonces, de la astronomía matemática, de manera que no hay razón bastante para considerar apócrifo el tratado.

También la autenticidad del prólogo ha sido debatida. En él se afirma la forma esférica del universo, se distinguen las estrellas fijas y los planetas y se definen los principales puntos y círculos de la esfera de las fijas. La forma de esta parte del texto no se corresponde ni con los modos utilizados por Euclides en los *Elementos* o la *Óptica* —las proposiciones precedidas de definiciones y postulados expresados de un modo un tanto lacónico, sin otras exégesis— ni con lo habitual en el período helenístico, a saber, los prólogos en forma de carta dedicatoria. De ello se desprende que el prólogo puede no sólo ser de autor distinto del que compuso las demostraciones, sino también de época diferente.

Neugebauer rechaza la autenticidad del prólogo basándose en que el proemio al *De diebus et noctibus* de Teodosio, semejante a éste, está compuesto en realidad a base de escolios. Berggren y Thomas comparan esta introducción con la que precede a la *Opticorum Recensio*[21], lo que les lleva a sospechar que los *Fenómenos* pasaron también por manos de un editor que intentó justificar los principios básicos sostenidos en la obra mediante referencias a observaciones cotidianas. Pero tras analizarlo en relación con los *Analíticos posteriores* de Aristóteles concluyen que tanto por su vocabulario como por su objetivo el prólogo resulta acorde con el resto del tratado, ya que complementa las demostraciones contenidas en las proposiciones arguyendo a favor de las hipótesis sobre la base de los fenómenos y demostrando que esas hipótesis explican las razones de los fe-

[21] V. Introducción a la *Óptica*, pág. 132.

nómenos[22]. Esto no implica —continúan— ni que el prólogo formara parte del tratado original ni que su autor siguiera los dictados aristotélicos, sino, simplemente, que quien lo escribió sabía cómo hacerlo de manera que resultara razonable desde el punto de vista filosófico y, quizá, pedagógico.

En cuanto a ediciones y traducciones, el siglo XVI vio aparecer tres versiones latinas completas de los *Fenómenos*[23], pero el primer texto griego impreso, preparado por el inglés Gregory no aparece hasta 1703. La primera traducción a las lenguas modernas fue la del alemán Nokk (Friburgo, 1850). Todas estas versiones estaban basadas en manuscritos que nos ofrecen una versión del texto con dieciseis proposiciones, quince completas y una mutilada[24]. En 1882 Heiberg da a conocer un manuscrito[25] con dieciocho proposiciones completas, algunas de las cuales presentan un texto notablemente distinto del conocido hasta entonces. Heiberg designa como *a* el texto con dieciocho proposiciones, el descubierto por él, y como *b* el texto de quince proposiciones, conocido desde más antiguo. La traducción de Berggren y Thomas al inglés (1996), con nuevas figuras y una paráfrasis de cada proposición en términos matemáticos modernos, se basa también en el texto de Heiberg.

---

[22] Cf. BERGGREN y THOMAS, *op. cit.*, págs. 11-12.

[23] La primera, la edición príncipe de Euclides (Venecia, 1505) en la versión latina de Zamberti; medio siglo después (Mesina, 1558) aparecieron los *Fenómenos* junto con las obras de esférica de Teodosio, Menelao y Autólico en la versión de Maurólico; la tercera versión latina fue la de Auria (Roma, 1591); Dasypodius editó en Estrasburgo (1571) su *Euclidis omnes omnium librorum propositiones*, en el que aparecían los enunciados en griego y latín.

[24] Entre esos manuscritos el más destacado es el *Vaticanus graecus* 204.

[25] El Vindobonense XXXI, 13, de gran importancia también para el texto de la *Óptica*.

En cuanto a nuestra traducción, será la primera versión castellana de la obra, versión que hemos realizado tomando el texto griego y las ilustraciones que aparecen en el vol. VIII de la edición de Heiberg y Menge, sin otros cambios que la corrección de ciertas erratas en las mayúsculas que designan ciertos puntos en las ilustraciones, corrección realizada sirviéndonos del texto latino sin erratas que aparece en la misma edición.

Presupuestos[1]

Puesto que se ve que los astros no errantes[2] se levantan siempre desde el mismo lugar y se ponen siempre en el mismo lugar[3] y que los que se levantan juntos se levantan siempre juntos y que los que se ponen juntos siempre se ponen juntos y que en la traslación

---

[1] El texto que antecede a las proposiciones, que carece de títulos o subtítulos en los manuscritos, es quizá, como señalábamos en la Introducción, de diferente autor que los enunciados y demostraciones. Los subtítulos que introducimos tienen el propósito de facilitar al lector la comprensión y desvelar lo que consideramos la intención de este excurso previo. De acuerdo con Aristóteles, *Analíticos Posteriores* 71 b9-72 a38, especialmente 72 a15-72 a24, existen dos clases de premisas últimas en toda ciencia: los axiomas *(axiṓmata),* que contienen principios usados en las demostraciones de todas las ciencias, y los supuestos *(théseis)* o principios propios de cada ciencia determinada, que se subdividen a su vez en presupuestos *(hypothéseis),* que, ante dos alternativas, admiten una como cierta, y definiciones *(horismoí).* Relacionando esas opiniones aristotélicas con el hecho de que en este excurso previo, efectivamente, la primera parte comienza sus asertos con un *thetéon* («hay que suponer») y se continúa con una serie de definiciones, hemos optado por incluir los subtítulos que aparecen.

[2] En contraposición con las estrellas «errantes» *(planētaí,* de donde el español «planetas»), las «no errantes» *(aplaneîs)* guardan la misma posición relativa en la bóveda celeste.

[3] Al mencionar los levantes y ponientes se refiere a la aparición y desaparición de los astros cuando alcanzan el horizonte.

del levante al poniente mantienen las mismas distancias mutuas, y puesto que eso ocurre sólo en el caso de las cosas que se desplazan en movimiento de rotación, dado que la vista dista lo mismo de cualquier punto de la circunferencia, como se demuestra en la *Óptica*[4], ha de suponerse que los astros se desplazan circularmente y que están sujetos en un cuerpo y que la vista dista lo mismo de las circunferencias.

Y se ve un astro entre las Osas, que no cambia de lugar en lugar, sino que da vueltas en el sitio en que está[5]. Y puesto que parece que éste dista por todas partes lo mismo de las circunferencias de los círculos en los que se desplazan los demás astros, ha de suponerse que todos los círculos son paralelos, de manera que todos los astros no errantes se mueven en círculos paralelos que tienen por polo al astro mencionado.

---

[4] La vista sólo dista lo mismo de cualquier punto de la *circunferencia* si está situada en su centro o se cumplen las condiciones expresadas en *Óptica,* prop. 34, 35 y lema y 36.; pero en este tratado se supone, de acuerdo con la hipótesis astronómica de origen pitagórico, que el mundo tiene forma *esférica* y que la tierra ocupa el centro de tal esfera (cf. Prop. 1), por lo que sospechamos que aquí se haya producido alguna interpolación o corrupción del texto.

[5] Según anotan BERGGREN y THOMAS (págs. 48-49 y n.), en época helenística no había ninguna estrella visible que ocupara en efecto el lugar correspondiente al polo celestial del hemisferio norte. Aún así, el nombre de «estrella polar» que recibe hoy αUMi procede, justamente, de que fuera considerada uno de los polos del eje de la esfera celeste. Aunque, al revés que los *Elementos,* los *Fenómenos* no presentan unas definiciones completas de los términos que luego emplean en sentido técnico, en el *De sphaera,* de AUTÓLICO (ed. MOGENET, pág. 195, líns. 9-11) leemos que «Eje de la esfera es el diámetro de la esfera sobre el cual, inmóvil, la esfera gira; polos de la esfera son los extremos del eje».

A algunos de éstos no se les ve ni que se levanten ni que se pongan, porque se mueven en círculos elevados, a los que se les llama «siempre visibles»[6]. Ésos son los astros que siguen al polo visible hasta el círculo ártico. Y los astros que están más cerca del polo se desplazan en círculos menores, y en el círculo máximo los que están en el ártico, los cuales incluso parece que rozan el horizonte.

A todos los que están al sur[7] de éstos se los ve levantarse y ponerse porque sus círculos no están del todo por encima de la tierra, sino una parte de ellos sobre la tierra y el resto bajo tierra. De los segmentos de cada uno[8] sobre tierra parece mayor el más próximo al mayor de los siempre visibles, mientras que de los segmentos bajo tierra parece menor el más próximo al círculo dicho[9] por ser el más pequeño el tiempo de la traslación bajo tierra de los astros que están en este círculo, mientras que el de la traslación sobre tierra es el mayor, y los astros que están en los círculos más lejanos de éstos[10] siempre tienen un tiempo menor de traslación sobre la tierra, mientras que de traslación bajo tierra tienen más. Y los que están más próximos al sur tendrán un tiempo

[6] El redactor de estos presupuestos trabaja siempre en la suposición de que el observador se encuentra en la zona templada del hemisferio norte; los datos fiables que podía manejar eran, desde luego, procedentes de esas latitudes. El círculo ártico que menciona aquí no es el geográfico, sino un círculo celeste cuyas estrellas, para un observador como el descrito, son visibles todo el año. Así se explica que casi siempre se refiera a este círculo como «el mayor de los siempre visibles». Por lo demás, sólo en estos presupuestos y en la prop. 14 se le llama círculo ártico.

[7] En griego, *pròs mesēmbrían,* literalmente, «al mediodía».

[8] Es decir, de los arcos que recorre cada astro por encima de la tierra.

[9] Es decir, «el círculo mayor de los siempre visibles».

[10] «Éstos» se refiere a «los astros que parecen trasladarse por el círculo mayor de los siempre visibles».

mínimo de traslación sobre la tierra, y uno máximo de traslación bajo la tierra. Y los que están en el círculo de en medio de éstos parece que hacen la traslación sobre la tierra de la misma duración que la de bajo tierra. Por eso llamamos a ese círculo «ecuador»[11].

Y los que están sobre círculos que distan lo mismo del ecuador hacen de la misma duración la traslación de los segmentos alternos: así, los segmentos sobre la tierra de los astros que están al norte[12] son de la misma duración que los segmentos bajo tierra de los que están al sur; y los segmentos por encima de la tierra de los que están al sur, de la misma duración que los de bajo tierra de los que están al norte. El tiempo conjunto de cada círculo —el de por encima de la tierra y el conjunto bajo tierra— parece igual. Además, el círculo lácteo[13] y el zodíaco[14], al ser oblicuos a

---

[11] En griego, *isēmerinós.* Preferimos el término «ecuador» frente a versiones más literales como «círculo equinoccial» por entender que de este modo es más fácil emparentarlo con un círculo celeste y no confundirlo con el término geográfico.

[12] En griego, *pròs árktous,* literalmente, «hacia las Osas».

[13] El Círculo de Leche o Vía Láctea se menciona únicamente aquí y el autor no llega a definirlo ni a especificar su naturaleza. ARATO *(Fenómenos,* 278-9 y 511, escrito entre 276 y 274 a. C.) considera que la Vía Láctea es otro de los círculos máximos, junto con el ecuador y la eclíptica. Aunque Arato no pueda ser considerado una fuente científica, puesto que su obra debe ser encuadrada en el género de la *écfrasis* o descripción literaria, resultaría difícil de creer que hubiera incluido en su obra asertos considerados erróneos por los científicos de su época.

[14] *Ho zōidiakòs (kýklos)* y *ho tôn zōidíōn kýklos* son los nombres que se dan a lo largo de la obra al circulo del zodíaco, que nunca es definido (aunque ya se refiere a una abstracción, y no sólo a la serie de constelaciones). Estas constelaciones están situadas en el firmamento de tal manera que el sol parece ir recorriéndolas en su aparente camino anual alrededor de la tierra. En nuestro tiempo, ese camino aparente del sol recibe el nombre de eclíptica porque ahí es donde se producen los eclipses de sol y de luna. Nada hace pensar, sin embargo, que el autor de los *Fenó-*

los círculos paralelos y cortarse mutuamente en su movimiento circular, parece que tienen siempre semicírculos por encima de la tierra.

Por todo lo dicho anteriormente, supóngase que el mundo[15] es esférico: pues si fuera cilíndrico o cónico, tomados en su movimiento de circunvolución los astros que están sobre los círculos oblicuos y cortan al ecuador en dos partes iguales, no parecería siempre que se desplazan sobre semicírculos iguales, sino que parecería unas veces que sobre un segmento mayor que un semicírculo y otras veces que sobre uno menor. Pues si se corta un cono o un cilindro mediante un plano que no es paralelo a la base, resulta una sección de un cono acutángulo[16], que es semejante a un escudo oblongo. Es evidente, por tanto, que al cortar semejante figura por la mitad hace segmentos desiguales en longitud y anchura. Y es evidente, por otra parte, que si se corta en secciones oblicuas por la mitad también así forma segmentos desiguales, cosa que no parece que suceda en el caso del mundo. Por todo eso, el mundo es esférico y gira uniformemen-

menos tuviera ese hecho presente. Con toda probabilidad la astronomía antigua contemporánea de Euclides ya tenía observado el fenómeno, pero aún así, la expresión *ekleiptikòs kýklos* no está testimoniada con certeza en griego hasta que en el siglo III d. C. la usa Aquiles Tacio. Por estas razones hemos preferido la traducción «el zodíaco» o «el círculo del zodíaco» aunque se encuentre más alejada de nuestra expresión habitual.

[15] Utilizamos «mundo» para verter el término *kósmos:* según la tradición griega iniciada por los pitagóricos y seguida por Platón, Eudoxo y Autólico, por mencionar sólo algunos nombres destacados, el *kósmos* comprende las esferas en que giran las estrellas fijas, la luna, el sol y los planetas con la tierra como centro.

[16] Es decir, una elipse. El término que se emplea en griego y que hemos respetado es el habitual hasta Arquímedes; a partir de Apolonio se utilizará y pasará a las lenguas europeas el de «elipse».

te[17] en torno a su eje, del cual es visible un polo, que está por encima de la tierra; y el otro, al estar bajo tierra, es invisible.

Definiciones

Y llámese horizonte[18] al plano que pasa por nuestra vista e incide sobre el mundo y que delimita la parte que se ve sobre la tierra. Y es un círculo: pues si una esfera es cortada por un plano, la sección es un círculo [Teod., I 1].

Y llámese círculo meridiano[19] al que pasa por los polos de la esfera y es perpendicular al horizonte.

Y trópicos, a aquéllos a los que es tangente el círculo que pasa por los signos del zodíaco, que tienen los mismos polos que la esfera.

Y el círculo que pasa por los signos del zodíaco y el del ecuador son máximos, pues se cortan mutuamente.

El principio de Aries y el principio de Libra son diametralmente opuestos y estando en el ecuador se levantan y se

---

[17] El adverbio *homalôs* es el término usado para referirse a la velocidad uniforme. Coincide con la terminología de Autólico, quien lo define «Se dice que unos puntos se trasladan uniformemente *(homalôs)* cuando recorren en igual tiempo magnitudes iguales o semejantes; si, al trasladarse uniformemente un punto sobre una línea recorre dos líneas, guardarán la misma razón el tiempo en que el punto recorre una de las líneas con el tiempo en que recorre la otra y la línea con la línea». (AUTÓLICO, ed. MOGENET, pág. 195, líns. 3-8).

[18] Aparece como término técnico *horízōn* para designar al horizonte; supone una diferencia con el modo de expresión de Autólico, quien habitualmente lo llama *kýklos horízōn tò te aphanès kaì tò phaneròn hēmisphaírion tês sphaíras:* «el círculo que separa el hemisferio invisible y el visible de la esfera».

[19] «Meridiano» y «trópicos», igual que antes «ecuador» y «círculo ártico» se refieren a círculos celestes, no geográficos.

ponen por parejas[20] teniendo entre ambos seis de los doce signos del zodíaco, mientras que el ecuador tiene dos semicírculos, puesto que estando cada uno de los dos principios en el ecuador se desplazan en el mismo tiempo, el uno en la traslación por encima de la tierra y el otro en la de bajo tierra.

Y si la esfera gira uniformemente en torno a su propio eje, todos los puntos que están sobre la superficie de la esfera recorren en el mismo tiempo arcos de circunferencia semejantes[21] de los círculos paralelos en los que se desplazan. Pues recorren arcos de circunferencia semejantes del ecuador, el uno bajo tierra, el otro sobre tierra, ya que los arcos son iguales, pues cada uno de los dos es un semicírculo, dado que lo que se recorre del levante al levante o del poniente al poniente es un círculo completo. Luego a veces se cortan mutuamente en dos partes iguales el círculo del zodíaco y el ecuador. Y si en la esfera dos círculos se cortan mutuamente en dos partes iguales, cada uno de los secantes será un círculo máximo. Luego el círculo del zodíaco y el ecuador son máximos.

También el horizonte pertenece a los círculos máximos, pues siempre corta en partes iguales al círculo del zodíaco y al ecuador que son círculos máximos. Y es que de los doce signos del zodíaco seis están siempre arriba, por encima de la tierra, y siempre tiene un semicírculo por encima del ecuador. Y es que los astros que están en éste, al levantarse y ponerse en un tiempo igual, se presentan el uno del levante a la puesta y el otro de la puesta al levante. Es evidente por tanto, a partir de las primeras demostraciones, que

---

[20] El texto griego emplea la expresión *katà syzygían,* de donde procede el término español «sicigia», hoy especializado para designar la conjunción o la oposición entre la luna y el sol.

[21] Los arcos semejantes lo son en sentido geométrico; cf. más arriba, n. 17.

un semicírculo del ecuador está siempre por encima del horizonte. Y si un círculo, permaneciendo inmóvil en la esfera, corta por la mitad a alguno de los círculos máximos siempre en movimiento, también el que corta es un círculo máximo [Autól., *De sph.* 12]. Luego el horizonte pertenece a los círculos máximos.

El tiempo de circunvolución del mundo es aquél en el cual cada uno de los astros no errantes se presenta del levante al siguiente levante o de cualquier lugar a ese mismo lugar.

Desplazamiento de la circunferencia del hemisferio visible es cuando, estando el punto antecedente de la circunferencia en el levante, el consecuente está en el poniente, tras haberse levantado y recorrido todo el hemisferio sobre la tierra. Y del no visible, cuando estando el punto antecedente de la circunferencia en el poniente, el consecuente está en el levante tras haberse puesto y haber recorrido todo el hemisferio bajo tierra.

Proposición 1

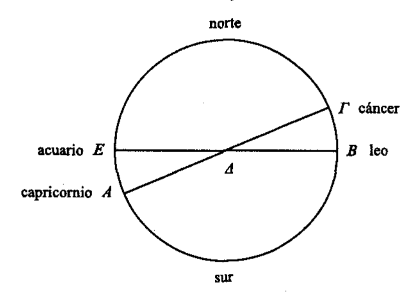
La tierra está en medio del mundo y ocupa la posición del centro en relación con el mundo.

En el mundo, sea AB el horizonte; nuestra vista, la tierra en el punto Δ y sea Γ la parte del levante y A la del poniente y mediante una dioptra[22] situada en el punto Δ contémplese a Cáncer levantándose en el punto Γ.

Entonces, mediante la misma dioptra se verá a Capricornio poniéndose: véase en el punto A. Y puesto que los

[22] La dioptra es un instrumento para medir a distancia. Lo describe Herón en su tratado *Sobre la dioptra*.

puntos Α, Δ, Γ se ven mediante la dioptra, la línea que pasa por Α, Δ, Γ es una recta. De manera que Α, Δ, Γ es un diámetro de la esfera de los astros no errantes y del zodíaco, puesto que separa seis signos del zodíaco por encima del horizonte.



A la vez, al cambiar de posición el círculo del zodíaco y la dioptra, véase a Leo levantándose en el punto Β; entonces, mediante la misma dioptra se verá a Acuario poniéndose: véase en el punto Ε. Y puesto que se ven los puntos Ε, Δ, Β mediante la dioptra, la línea que pasa por Ε, Δ, Β es recta. Sea la recta ΕΔΒ. Entonces ΕΔΒ es un diámetro de la esfera de los astros no errantes y del círculo del zodíaco. Y se había demostrado que también ΑΔΓ lo era. Luego el punto Δ es el centro de la esfera de los astros no errantes y está en la tierra. De la misma manera demostraremos que cualquier punto que se tome sobre la tierra es el centro del mundo.

Luego la tierra está en medio del mundo y ocupa la posición del centro en relación con el mundo.

Proposición 2

En una circunvolución del mundo el círculo que pasa por los polos de la esfera será dos veces perpendicular al horizonte; y el círculo del zodíaco será dos veces perpendicular al meridiano, pero nunca al horizonte, cuando el cénit[23]

[23] En griego, *pólos toû horízontos,* es decir, «polo del horizonte».

esté entre el trópico de verano y el polo visible. [Si el cénit estuviera sobre uno de los trópicos, el círculo del zodíaco sería perpendicular al horizonte una sola vez; y cuando el cénit estuviera entre los círculos de los trópicos, el círculo del zodíaco sería dos veces perpendicular al horizonte][24].

Sea el horizonte el círculo EBΓ y sea ΩΔ el círculo máximo de los siempre visibles y EZ el máximo de los siempre invisibles y sea HΘK el trópico de verano[25] y ΛMN el trópico de invierno y tenga el círculo del zodíaco la posición de KA, y sean los puntos Ξ, O los polos de la esfera. Y trácese por los puntos Ξ, O el círculo máximo AΞEOΠ.

Digo que en una circunvolución de la esfera el círculo que pasa por los polos de la esfera será dos veces perpendicular al horizonte, y que el círculo del zodíaco será dos veces perpendicular al meridiano, pero nunca al horizonte cuando el cénit esté entre el círculo HΘK y el polo Ξ.

Que el círculo que pasa por los polos de la esfera es dos veces perpendicular a BEΓ está ya demostrado [Autól., *De sph.* 10].

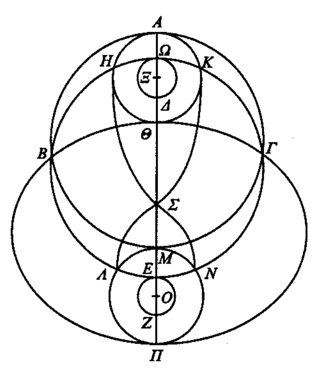
* * *

[24] El pasaje entre corchetes es considerado por Heiberg una interpolación posterior a Papo. En la redacción presente, como vemos, la proposición pretende ofrecernos cinco demostraciones. La primera de ellas es rápidamente solventada con un «ya está demostrado» sin más indicaciones. Como señalamos en la referencia entre corchetes, se puede encontrar la demostración en la obra *Sobre la esfera en movimiento,* de AUTÓLICO, que se nos ha conservado, aunque también cabría la probabilidad de que Euclides conociera la demostración gracias a algún otro tratado de carácter astronómico o a un tratado de esférica que no conocemos.

[25] Para referirse a los trópicos, Euclides emplea siempre las expresiones que vemos aquí, «trópico de verano» *(therinòs tropikós)* y «trópico de invierno» *(cheimerinòs tropikós),* nunca la de «trópico de Cáncer» y sólo una vez (prop. 18) «trópico de Capricornio», que son los nombres que se les dan en los *Fenómenos* de ARATO, tan próximos en el tiempo a este tratado.

Digo que también el círculo ΚΛ será dos veces perpendicular al meridiano ΑΘ.

Puesto que se cortan mutuamente en la esfera los dos círculos ΩΒΓ[26], ΗΘΚ y por sus polos se ha trazado el círculo máximo ΑΘΟ, entonces el arco ΗΘ es igual al ΘΚ [Teod., II 9]. Por la misma razón, también el ΛΠ es igual al arco ΠΝ. Y el arco ΗΘΚ es igual al arco ΛΠΝ [Teod., II 19]. Luego también es igual y semejante el arco ΛΠ al arco ΚΘ. Luego el punto Κ, partiendo de Κ, tras recorrer el arco ΚΘ, se presenta en Θ en el mismo tiempo que el punto Λ, tras recorrer el arco ΛΠ, se presentará en Π y el círculo del zodíaco tendrá la posición de ΘΒΠΓ. Así, puesto que en la esfera los dos círculos ΗΘΚ, ΘΒΠΓ son tangentes, y puesto que el círculo máximo ΞΘΟΠ ha sido trazado pasando por los polos de uno y el punto de contacto, entonces ΞΘΟΠ pasará también por los polos de ΘΒΠΓ [Teod., II 5] y será perpendicular a éste [Teod., I 15]. De manera que también ΘΒΠΓ es perpendicular a ΞΘΟΠ.



Y a la vez, puesto que el arco ΘΗ es semejante al arco ΠΝ, Θ se presenta en Η en el mismo tiempo que Π se presenta en Ν, y el círculo del zodíaco tendrá por posición la de ΗΣΝ.

A la vez, puesto que el arco ΗΑ es semejante al arco ΜΝ, Η se presenta en Α en el mismo tiempo en que Ν se presenta en Μ y el círculo del zodíaco tendrá la posición de ΑΒΜΓ.

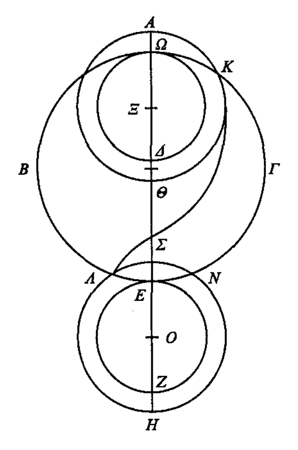
---

[26] Las letras ΩΒΓ designan aquí al horizonte.

Así, puesto que en la esfera los dos círculos ΑΒΜΓ, ΑΘ son tangentes y puesto que el círculo máximo ΑΞΘΟ ha sido trazado pasando por los polos de uno y por el punto de contacto [Teod., II 5], entonces ΑΞΘΟ es perpendicular a ΑΒΜΓ; de manera que también ΑΒΜΓ es perpendicular a ΑΞΘΟ.

Y a la vez, puesto que el arco ΑΚ es semejante al arco ΛΜ, Α se presenta en Κ en el mismo tiempo en que Μ se presentará en Λ y el círculo del zodíaco tendrá la posición de ΚΛ. Luego en el tiempo en que Κ, tras partir de Κ y recorrer la circunferencia ΚΘΗΑΚ, que es el tiempo de una circunvolución del mundo, llegue a Κ, en ese tiempo el círculo ΚΛ habrá sido dos veces perpendicular al círculo ΑΟ[27].

* * *



Supuesto lo mismo, esté el polo del círculo ΒΕΓ[28] entre los puntos Θ y Ξ.

Digo que el círculo ΚΛ del zodíaco nunca será perpendicular al horizonte ΒΕΓ.

Pues si el círculo ΚΛ va a ser perpendicular al ΒΕΓΚ, lo cortará por los polos [Teod., I 13] y pasará por el cénit que está entre los puntos Θ, Ξ y cortará al ΑΗΚ, lo cual es imposible; luego el zodíaco ΚΛ nunca será perpendicular al horizonte ΒΕΓΚ[29].

[27] Concluye aquí la segunda de las demostraciones pretendidas «el círculo del zodíaco será dos veces perpendicular al horizonte cuando el polo del horizonte esté entre el trópico de verano y el polo visible».

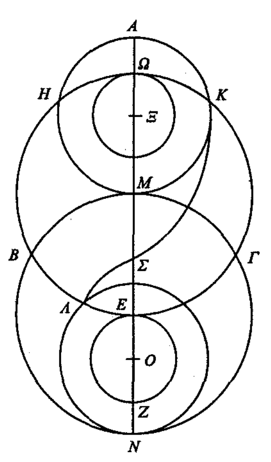
[28] Es decir, el cenit.

[29] Concluye aquí la tercera de las demostraciones pretendidas; «el círculo del zodíaco nunca será perpendicular al horizonte cuando el polo del horizonte esté entre el trópico de verano y el polo visible». Hasta aquí

* * *

[Sea el cénit el punto M en el círculo AHMK.

Digo que el zodíaco será perpendicular al horizonte una sola vez.



Puesto que el arco KM es semejante al arco AN, K, tras recorrer el arco KM, se presenta en M en el mismo tiempo en que el punto Λ se presentará en N y el círculo del zodíaco tendrá la posición MBNΓ. Puesto que MBNΓ corta a HBΓ por los polos, lo cortará en dos partes iguales y perpendicularmente [Teod., I 15]. Luego el círculo del zodíaco es perpendicular al horizonte.

* * *

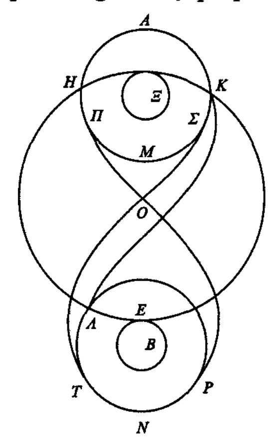
Sea el cénit el punto O entre los trópicos.

Digo que el círculo KΛ será dos veces perpendicular al horizonte.

---

el lector debía servirse de las dos primeras ilustraciones. Reproducimos las del códice *Vaticano gr.* 204; el códice *Vindobonense* XXXI, 13 ofrece una ilustración diferente y errónea. El lector interesado en consultarla puede hacerlo en la edición de HEIBERG y en el trabajo de BERGGREN y THOMAS. A partir de aquí se desarrollan las demostraciones de las tesis que HEIBERG considera interpolación tardía, y que van acompañadas de dos ilustraciones más; el códice *a* presenta otras ilustraciones también claramente erróneas, que HEIBERG reproduce como parte del aparato crítico.

Trácense por el punto O los círculos máximos ΣOT, ΠOP, tangentes al círculo AHMK. También serán tangentes al NP. Y puesto que ΠOP corta a HEK por los polos, lo cortará en dos partes iguales y perpendicularmente. Luego el círculo ΠP es perpendicular al HEK. Y, por la misma razón, también el ΣOT es perpendicular al HEK. Y puesto que el semicírculo que parte de K hacia la parte de KΛ no llega a coincidir[30] con el semicírculo que parte de Σ hacia la parte de Σ, T, el arco KΣ es semejante al arco ΛT [Teod., II 13]. Luego K se presenta en Σ en el mismo tiempo en que A se presentará en T y el círculo KΛ coincidirá con el círculo ΣT. Y el círculo ΣT es perpendicular al HEK; luego también el círculo KΛ es perpendicular al círculo HEK. Y, a la vez, puesto que el arco ΣMΠ es semejante al TNP, Σ se presenta en Π en igual tiempo que T se presentará en P, y el círculo del zodíaco coincidirá con el círculo ΠOP; y el círculo ΠOP es perpendicular a HEK, luego también el círculo del zodíaco es perpendicular al horizonte HEK.



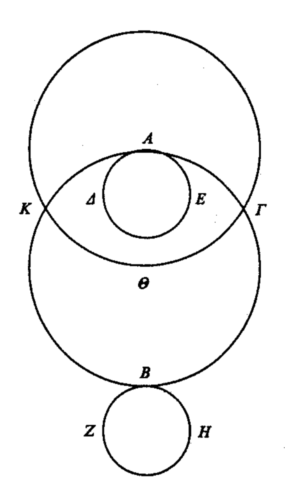
Luego el círculo del zodíaco será dos veces perpendicular al horizonte].

[30] Euclides emplea la expresión *asýmptōtón esti,* cuyo significado, evidentemente, no coincide aún con el que damos a «asíntota». Apolonio será el primero en usarlo en ese sentido.

PROPOSICIÓN 3

Cada uno de los astros no errantes que hacen levantes y ponientes se levanta y se pone en el mismo punto del horizonte.

En el mundo, sea el horizonte ΑΒΓ y sea el círculo ΑΔΕ el mayor de los círculos siempre visibles y sea ΒΗΖ el mayor de los siempre invisibles, y tómese el astro Θ de entre los que hacen levantes y ponientes, y sea Γ la parte del levante y Κ la del poniente.



Digo que el punto Θ se levanta y se pone siempre en los mismos puntos del horizonte al girar la esfera.

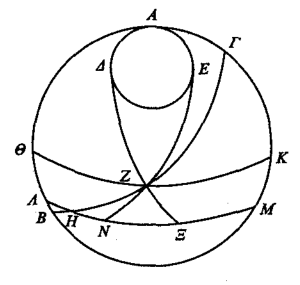
Sea ΚΘΓ el círculo en que se desplaza el punto Θ. Así, el círculo ΚΘΓ corta al horizonte y es perpendicular al eje de la esfera [Autól., *De sph.* 1]. Los círculos que son perpendiculares al eje y que cortan al horizonte hacen los levantes y ponientes en los mismos puntos del horizonte [Autól., *De sph.* 7]. Luego el círculo ΚΘΓ siempre se levanta en el punto Γ y siempre se pone en el Κ. Y el astro Θ se desplaza sobre la circunferencia del círculo ΚΘΓ; luego el astro Θ se levanta siempre en el punto Γ y se pone en el Κ.

PROPOSICIÓN 4

De cuantos astros están situados sobre la circunferencia de un círculo máximo[31] *que ni corta al círculo máximo de los siempre visibles ni es tangente a él, los que primero se levantan también se ponen primero, y los que se ponen primero se levantan primero.*

En el mundo, sea ABΓ el horizonte y AΔE el círculo máximo de los siempre visibles, y sea ΓZB otro círculo máximo que ni corte al círculo AΔE ni sea tangente a él, y tómense, en la circunferencia del círculo ΓZB, dos puntos al azar Z, H.

Digo que de los puntos Z, H, el que se levanta primero se pone primero y el que se pone primero se levanta primero.



Sea Γ la parte del levante y B la del poniente, y sean ΘK, ΛM círculos paralelos por los que se desplazan los puntos Z, H; y trácese por Z el círculo máximo NZE tangente al círculo ΛΔE de manera que el semicírculo que parte de E hacia la parte de E, Z, N no llegue a coincidir con el semicírculo que va desde A hacia la parte de A, Γ [Teod., II 15]. Por tanto, el arco KZ es semejante al arco MN [Teod., II 13]. Luego el arco restante, ZΘ más su continuación bajo tierra hasta el punto K, es semejante al arco NΛ más su continuación bajo tierra hasta el punto M. Luego los puntos Z, N re-

[31] Como señalan BERGGREN y THOMAS, esta proposición será de especial utilidad cuando el «círculo máximo» considerado sea el del zodíaco (propos. 9, 14, 15).

corren en igual tiempo los arcos ZΘ, NΛ y sus continuaciones hasta los puntos K, M [Autól., *De sph.* 2]. Luego los puntos Z, N se levantan al mismo tiempo. Y H se levanta antes que N; luego H también se levanta antes que Z.

* * *

Digo que también se pone primero.

Trácese por el punto Z el círculo máximo ΞZΔ tangente al círculo AΔE de manera que el semicírculo que parte de Δ hacia la parte de Δ, Z, Ξ no llegue a coincidir con el semicírculo que parte de A hacia la parte de A, Θ [Teod., II 15]. Entonces, el arco ZΘ es semejante al arco ΞΛ [Teod., II 13]. Por tanto, el punto Z recorre el arco ZΘ en igual tiempo que el punto Ξ el arco ΞΛ. Luego al presentarse el punto Z en el punto Θ también el punto Ξ se presentará en Λ. Luego los puntos Z, Ξ se ponen al tiempo. Y H se pone antes que Ξ; luego H también se pone antes que Z.

De la misma manera demostraríamos que también el que se pone primero se levanta primero.

Proposición 5

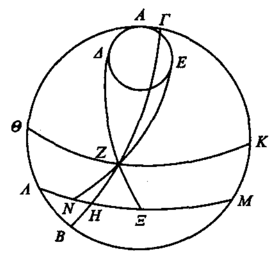
De cuantos astros están sobre la circunferencia de un círculo máximo que corta al círculo máximo de los siempre visibles, los que están hacia el norte[32] *se levantan primero y se ponen después.*

En el mundo, sea ABΓ el horizonte y AΔE el círculo máximo de los siempre visibles y ΓZB otro círculo máximo que corta al círculo AΔE. Y tómense en la circunferencia del círculo ΓZB dos puntos al azar Z, H y esté el punto Z al norte.

[32] Literalmente, *tà pròs taîs árktois,* «los que están junto a las Osas».

Digo que el punto Z se levanta antes que H y se pone después.

Sea Γ la parte del levante y B la del poniente y sean ΘK, ΛM círculos paralelos por los que se desplazan los puntos Z, H y trácese por el punto Z el círculo máximo NZE tangente al círculo AΔE de manera que el semicírculo que parte de E hacia la parte de Z, N no llegue a coincidir con el semicírculo que parte de A hacia la parte de A, Γ, K [Teod., II 15]. Entonces, el arco ZK es semejante al arco NM [Teod., II 13]. Luego también el arco restante ΘZ más su continuación bajo tierra hasta el punto K será semejante al arco ΛN más su continuación bajo tierra hasta el punto M. Luego los puntos Z, N recorren en igual tiempo los arcos ZΘ y NΛ y sus continuaciones hasta los puntos K, M [Autól., *De sph.* 2]. Luego los puntos Z, N se levantan al mismo tiempo. Y N se levanta antes que H; luego también Z se levanta antes que H.



* * *

Digo que también se pone después.

Trácese por el punto Z el círculo máximo ΞZΔ tangente al círculo AΔE de manera que el semicírculo que parte de Δ hacia la parte de Δ, Ξ no llegue a coincidir con el semicírculo que parte de A hacia la parte de A, Θ [Teod., II 15]. Entonces, el arco ZΘ es semejante al arco ΞΛ [Teod., II 13]. Luego el punto Z recorre el arco ZΘ en igual tiempo que el punto Ξ el arco ΞΛ. Luego al presentarse Z en el punto Θ también Ξ se presentará en el punto Λ. Luego los puntos Z, Ξ se ponen al mismo tiempo. Y H se pone antes que Ξ; luego H se pone también antes que Z; de manera que Z se pone después que

H. Y también se había demostrado que se levanta antes: luego Z se levanta antes que H, pero se pone después.

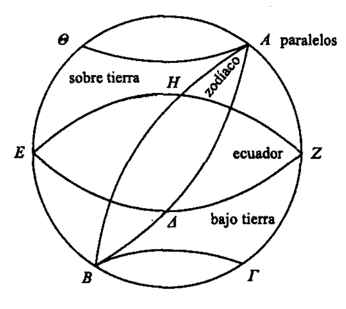
PROPOSICIÓN 6

Los astros que están diametralmente opuestos[33] *en el círculo del zodíaco se levantan y se ponen por parejas. Y lo mismo los que están en el ecuador.*

En el mundo, sea ABΓ el horizonte y tenga el círculo del zodíaco la posición de AHBΔ, y sea EZΔ el ecuador. Y sean AHB, EHZ los segmentos sobre la tierra. Entonces, el punto A es diametralmente opuesto al B y el E al Z.

Digo que los puntos A, B y los puntos E, Z se levantan y se ponen por parejas.

Sean A, Γ las partes del levante y B, E las del poniente y sean AΘ, BΓ círculos paralelos por los que se desplazan los puntos A, B, y sea AΘ el segmento de encima de la tierra y BΓ el de bajo tierra. Puesto que el punto A es diametralmente opuesto al B y el E al Z, entonces el arco EB es igual al arco AZ; pero EB es igual a ZΓ; luego también AZ es igual a ZΓ. Y EZΔ es el mayor de los paralelos, luego el círculo AΘ es igual al círculo BΓ [Teod., II 17]. Y AΘ, BΓ son sus segmentos alternos: luego el arco AΘ es igual al arco BΓ [Teod., II 19]. Luego el punto A, tras recorrer el arco AΘ, se presentará en el



[33] Literalmente, *tà ástra tà katà diámetron ónta,* «los astros que están según el diámetro».

punto Θ en el mismo tiempo que B, tras recorrer BΓ, se presentará en Γ [Autól., *De sph.* 2].

Pero A, tras recorrer AΘ y presentarse en Θ se pone, mientras que B, tras recorrer BΓ y presentarse en Γ, se levanta. Luego al ponerse A se levanta B. De manera semejante demostraríamos también que al levantarse A se pone B.

* * *

A la vez, puesto que cada uno de los segmentos EHZ, ZΔE es un semicírculo, el arco ZΔE es igual al arco EHZ. Luego el punto Z, tras recorrer el arco ZE, se presentará en E en igual tiempo que E, tras recorrer el arco EΔZ, se presentará en Z.

Pero Z, tras haber recorrido ZE y presentarse en E, se pone, mientras que E, tras haber recorrido EΔZ y presentarse en Z, se levanta. Luego al ponerse Z se levanta E.

De la misma manera demostraríamos también que todos los astros que están diametralmente opuestos en el círculo del zodíaco y en el ecuador se levantan y se ponen por parejas.

Proposición 7

El círculo del zodíaco se levanta y se pone en cualquier lugar del horizonte entre los círculos de los trópicos siempre que el círculo máximo de los siempre visibles no sea mayor que el círculo del trópico, y hace sus giros cambiando de posición en sentido contrario: cuando cambia de posición en los levantes hacia el mediodía, en las puestas parece estar cambiando de posición hacia el norte; mientras que cuando en los levantes cambia de posición hacia el norte, parece estar cambiando de posición en las puestas hacia el sur. Y está sobre nosotros cada vez de una manera.

En el mundo, sea ABΓ el horizonte y AΔ el trópico de verano y BΓ el de invierno y tenga el círculo del zodíaco la posición ΔEB, y sea ΔEB el segmento bajo tierra y ΔZB el de encima de la tierra.

Digo que el círculo del zodíaco se levanta y se pone en cualquier lugar del horizonte entre los trópicos y hace sus giros cambiando de posición en sentido contrario. Pues cuando cambia de posición en los levantes hacia el mediodía, en las puestas parece estar cambiando de posición hacia el norte. Y cuando en los levantes cambia de posición hacia el norte, en las puestas parece estar cambiando de posición hacia el mediodía. Y está sobre nosotros cada vez de una manera.

Sea Δ, Γ la parte de levante y A, B la de poniente. Así, que el círculo del zodíaco se levanta y se pone en cualquier lugar del horizonte entre los trópicos es evidente, puesto que es tangente a círculos mayores que aquéllos a los que es tangente el horizonte [Autól., *De sph.* 11].

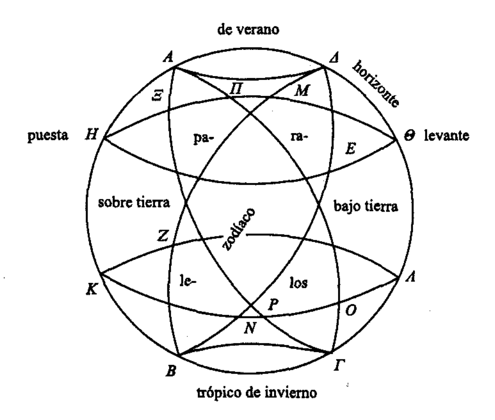
* * *

Digo que también hace sus giros cambiando de posición en sentido contrario.

Tómense los arcos ΔE, ZB iguales y opuestos y trácense los círculos paralelos HEΘ y KZΛ, por los cuales se desplazan los puntos E, Z. Puesto que el arco ΔE es igual al arco ZB, añádaseles en común EB y entonces, el arco ΔEB entero es igual al arco entero EBZ. Y ΔEB es un semicírculo; luego también EBZ es un semicírculo. Por consiguiente, el punto E es diametralmente opuesto al punto Z[34]. Y puesto que el arco EΔ es igual al arco ΔM y el ZB al BN, mientras que el ΔE es igual al ZB, entonces también el ΔM es igual al BN. Añádaseles en común el arco MB. Entonces, el arco entero ΔMB es

[34] La edición de HEIBERG presenta en el texto griego Σ en este lugar, en vez de Z; en la ilustración y la versión latina figura correctamente.

igual al arco entero MBN. Y ΔMB es un semicírculo; luego también MBN es un semicírculo. Luego el punto M es diametralmente opuesto al punto N. Y puesto que los puntos del círculo del zodíaco que están diametralmente opuestos



se levantan y se ponen por parejas [Prop. 6], entonces, al levantarse el punto Δ por el punto Δ, el diametralmente opuesto a él, B, se pone por el punto B; y al levantarse E por el punto Θ, el diametralmente opuesto a él, Z, se pone por el punto K; y al levantarse el punto N por el punto Λ, el diametralmente opuesto a él, M, se pone por el punto H; y además, al levantarse el punto B por el punto Γ, el diametralmente opuesto a él, Δ, se pone por el punto A.

Luego cuando el círculo del zodíaco cambia de posición en los levantes hacia el mediodía, en las puestas parece que está cambiando de posición hacia el norte.

* * *

Digo también que cuando en los levantes cambia de posición hacia el norte, en las puestas parece estar cambiando de posición hacia el mediodía.

Pues al levantarse el semicírculo ΔEB, el círculo del zodíaco tendrá la posición ΑΞΓ. Y de la misma manera demostraremos que el punto Ξ es diametralmente opuesto al punto O, y el P al Π. Y puesto que al levantarse el punto Γ por el punto Γ, el que le es diametralmente opuesto, A, se pone por el punto A; y que al levantarse el punto O por el punto Λ, el que le es diametralmente opuesto, Ξ, se pone por el punto H; y que al levantarse el punto Π por el punto Θ, el que le es diametralmente opuesto, P, se pone por el punto K; y que, además, al levantarse el punto A por el punto Δ, el que le es diametralmente opuesto, Γ, se pone por el punto B, entonces, cuando el círculo del zodíaco cambie de posición en los levantes hacia el norte, en las puestas parece estar cambiando de posición hacia el sur. Y se había demostrado también que cuando en los levantes cambia de posición hacia el sur, en las puestas parece estar cambiando de posición hacia el norte.

* * *

Y es evidente que está sobre nosotros cada vez de una manera.

Pues cuando el punto de contacto del círculo del zodíaco y del trópico de verano está en el punto medio del segmento de encima de la tierra del círculo del trópico de verano, estará en lo más alto respecto a nosotros; mientras que cuando esté[35] en el punto medio del segmento de bajo tierra del trópico de verano, estará en lo más bajo respecto a nosotros. Y siempre estará más inclinado al estar[36] más lejos del punto

[35] Sobreentiéndase como sujeto «el punto de contacto del círculo del zodíaco y el trópico de verano».

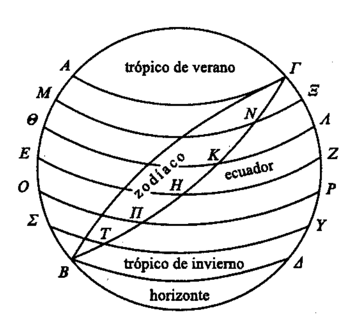
[36] Como en el pasaje al que se refería la nota anterior, hemos de sobreentender como sujeto «el punto de contacto del círculo del zodíaco y el trópico de verano».

medio del segmento bajo tierra del trópico de verano; y tendrá inclinaciones semejantes cuando diste lo mismo de cada uno de los puntos medios.

Proposición 8

Los signos del zodíaco se levantan y se ponen en segmentos del horizonte desiguales: en los segmentos mayores los signos de junto al ecuador, en otros menores los inmediatos a éstos; en los más pequeños los signos de junto a los trópicos y en segmentos iguales los que distan lo mismo del círculo ecuatorial.

En el mundo, sea el horizonte el círculo ΑΒΓΔ; los trópicos, los ΑΓ, ΒΔ; el círculo del zodíaco tenga la posición ΒΓ; sea ΕΖ el círculo ecuatorial, y divídase cada uno de los arcos ΓΗ, ΗΒ en tres partes iguales por los puntos Ν, Κ, Π, Τ.



Digo que los arcos ΓΝ, ΝΚ, ΚΗ, ΗΠ, ΠΤ, ΤΒ se levantan y se ponen en segmentos desiguales del horizonte; en los segmentos mayores ΚΗ, ΗΠ; en otros menores ΚΝ, ΠΤ; en los más pequeños los arcos ΓΝ, ΒΤ; y ΚΗ, ΚΝ y ΝΓ en segmentos iguales a ΗΠ, ΠΤ y ΤΒ.

Sean ΜΞ, ΘΛ[37], ΟΡ, ΣΥ círculos paralelos por los que se desplazan los puntos Ν, Κ, Π, Τ. Y puesto que los arcos

[37] La edición de Heiberg presenta en el texto griego por errata ΘΔ en lugar de ΘΛ. Las letras están correctamente en la versión latina y la ilustración.

HK, KN, NΓ son iguales entre sí, entonces los ZΛ, ΛΞ, ΞΓ son mayores unos que otros, empezando por el mayor, ZΛ [Teod., III 7]. Por la misma razón también los arcos EΘ, ΘM, MA son mayores unos que otros, empezando por el mayor, EΘ. Y también los arcos ZP, PY, YΔ son mayores unos que otros, empezando por el mayor, ZP; y además, EO, OΣ, ΣB son mayores unos que otros, empezando por el mayor, EO. Y puesto que los arcos ΓN, NK, KH, HΠ, ΠT, TB se levantan según los arcos ΓΞ, ΞΛ, ΛZ, ZP, PY, YΔ, y se ponen según los arcos AM, MΘ, ΘE, EO, OΣ, ΣB, se levantan y se ponen en segmentos de horizonte desiguales. Y puesto que en la esfera los círculos paralelos ΘΛ, OP separan del arco ΓB de un círculo máximo los arcos iguales ΠH, HK junto al mayor de los paralelos, EZ, entonces el círculo ΘΛ es igual al círculo OP [Teod., II 17]. Y puesto que en la esfera los círculos ΘΛ, OP son iguales y paralelos, separan de un círculo máximo ABΓΔ los arcos ΛZ[38], ZP hasta el mayor de los paralelos EZ, entonces el arco ΛZ es igual al arco ZP [Teod., II 18].

De manera semejante demostraríamos que también el arco ΞZ es igual al arco ZY; luego el arco restante ΞΛ es igual al arco restante PY. Por la misma razón también el arco ΓΞ es igual al YΔ.

Luego los signos del zodíaco se levantan y se ponen en segmentos del horizonte desiguales: en los segmentos mayores los signos de junto al ecuador, en otros menores los inmediatos a éstos; en los más pequeños los signos de junto a los trópicos y en segmentos iguales los que distan lo mismo del círculo ecuatorial.

---

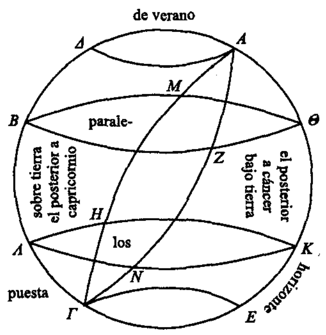
[38] Como un poco más arriba, la edición de Heiberg presenta por errata en el texto griego ΔZ en lugar de ΛZ, que aparece correctamente en la versión latina y la ilustración.

PROPOSICIÓN 9

Cuantos semicírculos del círculo del zodíaco no tengan sus principios en el mismo paralelo se levantan en tiempos desiguales: en el tiempo máximo el posterior a Cáncer, en un tiempo menor los inmediatos a éste, en un tiempo mínimo el posterior a Capricornio, cuando el polo boreal está por encima del horizonte y además el círculo máximo de los siempre visibles sea menor que el trópico de verano. Pero cuantos tengan sus principios en el mismo paralelo se levantan en igual tiempo.

En el mundo, sea ABΓ el horizonte, ΔA el trópico de verano, EΓ el trópico de invierno, tenga el círculo del zodíaco la posición AΓZ y sea AZΓ el semicírculo bajo tierra posterior a Cáncer. Sea ΓHA el semicírculo posterior a Capricornio y esté sobre la tierra.

Tómense los arcos iguales ΓH, ZA, de manera que Z sea diametralmente opuesto a H y sean BZΘ, KHΛ círculos paralelos por los que se desplazan los puntos Z, H. Entonces, el punto M es diametralmente opuesto al N.



Digo que el semicírculo AZΓ se levanta en el tiempo más largo; a continuación, el ZΓH, después de éste el NΓM, y en el tiempo más breve el ΓMA.

Puesto que el arco ΔA es mayor que uno semejante al BMΘ, y el BMΘ mayor que uno

semejante al ΛHK y el ΛHK mayor que uno semejante al ΓE, entonces el punto A recorre el arco AΔ en más tiempo que en el que Z, partiendo de Θ, recorre el arco ΘMB; y Z, partiendo de Θ, recorre ΘMB en más tiempo que en el que N, partiendo de K, recorre KHΛ; y N, partiendo de K, recorre KHA en más tiempo que en el que Γ, partiendo de Γ, recorre EΓ. Pero A, partiendo de A, recorre el arco AΔ en igual tiempo que el punto diametralmente opuesto a él, Γ, partiendo de Γ, recorre el arco bajo tierra del círculo ΓE [Prop. 6] y se levanta el semicírculo AZΓ. Y Z, partiendo de Θ, recorre el arco ΘMB en igual tiempo que el punto diametralmente opuesto a él, H, partiendo de Λ, recorre ΛNK y se levanta el semicírculo ZΓH. Y N, partiendo de K, recorre el arco KHΛ en igual tiempo que el punto diametralmente opuesto a él, M, partiendo de B, recorre el arco BZΘ y se levanta el semicírculo NΓM. Y Γ, partiendo de E, recorre el arco EΓ sobre la tierra en igual tiempo que el punto diametralmente opuesto a él, Λ, partiendo de Δ recorre el arco ΔA bajo tierra y se levanta el semicírculo ΓMA. Por tanto, AZΓ, es decir, el posterior a Cáncer, se levanta en el tiempo más largo y, a continuación, el ZΓH; después de éste el NΓM, y en el tiempo más breve el ΓMA, es decir, el posterior a Capricornio.

* * *

Y digo también que cuantos semicírculos tengan sus principios en el mismo paralelo se levantan en el mismo tiempo.

Puesto que Z recorre el arco ΘMB empezando por Θ en igual tiempo que M recorre el arco ΘMB empezando por Θ, mientras que Z, empezando por Θ, recorre ΘMB en igual tiempo que el punto diametralmente opuesto a él, H, recorre el arco ΛNK empezando por Λ y se levanta el semicírculo ZΓH [pues Z se levanta antes que Γ y Γ antes que H] y M, em-

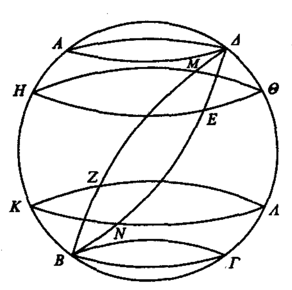
pezando por Θ, recorre ΘMB en igual tiempo que el punto diametralmente opuesto a él, N, recorre ΛNK empezando por Λ y se levanta el semicírculo MAN, [pues M se levanta antes que Z y Z antes que N]; entonces los semicírculos ZΓH, MAN se levantan en el mismo tiempo.

Luego los semicírculos del círculo del zodíaco, cuantos tienen sus principios en el mismo paralelo, se levantan en el mismo tiempo.

Proposición 9b

Los semicírculos del círculo del zodíaco que no tienen su principio sobre el mismo paralelo se levantan todos en tiempos desiguales: el posterior a Cáncer, en el tiempo más largo; los inmediatos a éste en menos tiempo, y en los tiempos más breves el posterior a Capricornio. Y los que tienen su principio en el mismo paralelo se levantan en tiempos iguales.

En el mundo, sea ABΓ el horizonte, AΔ el trópico de verano, BΓ el trópico de invierno y tenga el círculo del zodíaco la posición ΔEBZ, y sea la parte Γ, Δ la de levante y A, B la de poniente, y sea ΔEB el semicírculo posterior a Cáncer y BZΔ el posterior a Capricornio.



Digo que en el círculo del zodíaco los semicírculos que no tienen sus principios sobre el mismo paralelo se levantan en tiempos desiguales: en el tiempo más largo el posterior a Cáncer, ΔEB; en menos tiempo los inmediatos a éste; en el tiempo

más breve el posterior a Capricornio, BZΔ; y los que tienen sus principios en el mismo paralelo se levantan en tiempos iguales.

Tómense los arcos iguales ΔE, BZ y trácense los círculos paralelos HEΘM, KZΛN, por los que se desplazan los puntos E, Z y sean HMΘ, KZΛ sus segmentos sobre la tierra.

De la misma manera que en los anteriores demostraríamos que el punto E es diametralmente opuesto al punto Z, y el M al N. Y puesto que el arco AΔ es mayor que un arco semejante a HMΘ, y el HMΘ mayor que uno semejante a KZΛ, y además el KZΛ es mayor que uno semejante al BΓ, entonces el punto Δ, partiendo de Δ, recorre el arco ΔA en más tiempo que el punto E, partiendo de Θ, recorre el arco ΘMH; y E, partiendo de Θ, recorre el arco ΘMH en más tiempo que el N, partiendo de Λ, recorre el arco ΛZK; y el N, partiendo de Λ, recorre el ΛZK en más tiempo que B, partiendo de Γ, recorre el arco ΓB.

Pero el punto Δ recorre el arco ΔA en el mismo tiempo que el punto B, diametralmente opuesto a él, recorre el arco alterno opuesto BΓ y se levanta el semicírculo ΔEB. Y el punto E, partiendo de Θ, recorre el arco ΘMH en el tiempo en que el punto Z, diametralmente opuesto a él, partiendo de K, recorre el arco KNΛ y se levanta el semicírculo EBZ. Y el punto N, partiendo de Λ, recorre el arco ΛZK en el tiempo en que M, diametralmente opuesto a él, partiendo de H, recorre el arco HEΘ y se levanta el semicírculo NBM. Y B, partiendo de Γ, recorre ΓB en el tiempo en que Δ, diametralmente opuesto a él, partiendo de A, recorre el arco alterno opuesto AΔ y se levanta el semicírculo BZΔ.

Luego el semicírculo posterior a Cáncer, ΔEB, se levanta en el tiempo más largo; el semicírculo EBZ en menos que ΔEB; y NBM en aún menos tiempo que EBZ y en el tiempo más breve el posterior a Capricornio, BZΔ.

* * *

Digo que los que tienen sus principios en el mismo paralelo se levantan en tiempos iguales.

Tengan los semicírculos MΔN, EBZ sus principios en el mismo paralelo. Digo que los semicírculos MΔN, EBZ se levantan en tiempos iguales.

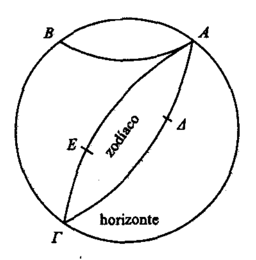
Puesto que en un tiempo igual el punto M, partiendo de Θ, recorre el arco ΘMH y E, partiendo de Θ, recorre el arco ΘMH , mientras que el punto M, partiendo de Θ recorre ΘMH en el tiempo en que el diametralmente opuesto a él, N, partiendo de K recorre el arco KNΛ y se levanta el semicírculo MΔN, y el punto E, partiendo del punto Θ, recorre el arco ΘMH en el tiempo en que el diametralmente opuesto a él, Z, partiendo de K recorre el arco KNA y se levanta el semicírculo EBZ, entonces, los semicírculos MΔN, EBZ se levantan en el mismo tiempo.

Proposición 10

Si dos semicírculos del zodíaco que tienen algún arco común se levantan en tiempos desiguales, también los arcos opuestos se levantan en tiempos desiguales y la diferencia de tiempos con que se levantan los semicírculos será la misma también con la que se levantan los arcos opuestos. Y si los dos semicírculos del círculo del zodíaco que tienen un arco en común se levantan en igual tiempo también los arcos opuestos se levantan en igual tiempo.

En el mundo, sea ABΓ el horizonte, tenga el círculo del zodíaco la posición AEΓΔ y tómense los arcos iguales AΔ, ΓE. Entonces, el punto Δ es diametralmente opuesto al E. Y levántense los semicírculos AΔΓ, ΔΓE en tiempos desiguales.

Digo que también los arcos opuestos ΑΔ, ΓΕ se levantan en tiempos desiguales y que la diferencia de tiempo con que se levantan los semicírculos ΑΔΓ, ΔΓΒ es la misma con que se levantan los arcos ΑΔ, ΓΕ.



Puesto que los semicírculos ΑΔΓ, ΔΓΕ se levantan en tiempos distintos, quítese de ambos el tiempo común del levante de ΔΓ. (Puesto que el arco ΔΓ siempre se levanta en el mismo tiempo que él mismo). Por tanto, los arcos restantes ΑΔ, ΓΕ se levantan en un tiempo desigual y las diferencias de tiempo con que se levantan los semicírculos ΑΔΓ, ΔΓΕ son las mismas que las de los arcos opuestos ΑΔ, ΓΕ.

* * *

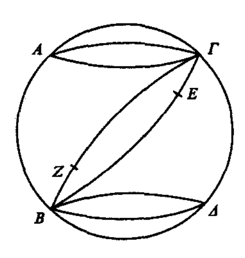
Y, a la inversa, los semicírculos ΑΔΓ, ΔΓΕ se levantan en igual tiempo. Quítese el tiempo común del arco ΓΔ: entonces los arcos restantes ΑΔ, ΓΕ se levantan en el mismo tiempo.

Proposición 10b

[El enunciado del teorema es común a las dos recensiones.]

Sea ΑΒΔΓ el círculo del horizonte, ΑΓ el trópico de verano, ΒΔ el de invierno, ΓΒ el zodíaco y tómense los arcos iguales ΓΕ, ΒΖ. Entonces, los semicírculos ΓΕΒ, ΕΒΖ se levantan en tiempos desiguales.

Digo que también los arcos ΓE, BZ se levantan en tiempos desiguales.



Puesto que ΓEB se levanta en más tiempo que EBZ, quítese el tiempo común del levante del arco EB. Pues el arco EB se levanta siempre en el mismo tiempo que él mismo. Luego el arco restante ΓE se levanta en más tiempo que BZ, y es evidente que hay las mismas diferencias entre los tiempos en los que se levantan los semicírculos ΓEB, EBZ y sus arcos opuestos ΓE, BZ.

* * *

Y está claro también que si algunos semicírculos se levantan en tiempos iguales, también los arcos opuestos se levantan en tiempos iguales.

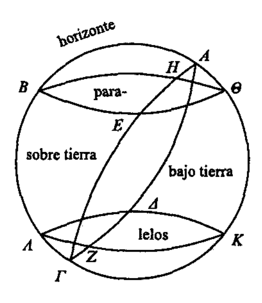
Proposición 11

En el tiempo en que se levanta uno de los arcos iguales y opuestos del círculo del zodíaco se pone el otro, y en el tiempo en que el uno se pone, el otro se levanta.

En el mundo, sea ABΓ el horizonte y tenga el círculo del zodíaco la posición AEΓΔ, y esté bajo tierra el semicírculo AΔΓ y tómense los arcos iguales y opuestos AΔ, ΓE.

Digo que en el tiempo en que el arco AΔ se levanta, se pone el arco ΓE y en el tiempo en que se levanta ΓE se pone el arco AΔ.

Sean EΘB, KΔΛ círculos paralelos por los que se desplazan los puntos E, Δ. Y puesto que los astros del círculo del zodíaco que están diametralmente opuestos se levantan y se ponen por parejas [Prop. 6], entonces, al levantarse E por el punto Θ, el diametralmente opuesto a él, Δ, se pone por Λ. Luego E, tras recorrer el arco EΘ, se presenta en Θ en el tiempo en que Δ, tras recorrer ΔΛ, se presenta en Λ. Pero Δ recorre ΔΛ en el tiempo en que ΔA se levanta, y E recorre EΘ en el tiempo en que se pone ΓE. Luego ΔA se levanta en el mismo tiempo en que se pone ΓE.



* * *

De la misma manera demostraríamos que ΔA se pone en el mismo tiempo en que se levanta ΓE.

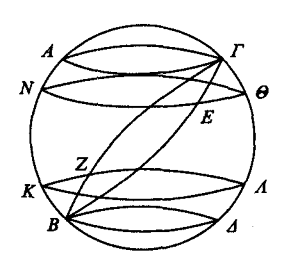
Proposición 11b

[El enunciado del teorema es común a las dos recensiones.]

Sea el círculo ABΔΓ el horizonte, y sea AΓ el trópico de verano y BΔ el de invierno, y sea ΓB el zodíaco, y tómense en él los arcos iguales y opuestos ΓE, BZ. Digo que ΓE se levanta en el tiempo en que BZ se pone.

Sean NΘ, KΛ los círculos paralelos por los que se desplazan los puntos E, Z. Y puesto que los astros que son diametralmente opuestos en el zodíaco se levantan y se ponen por

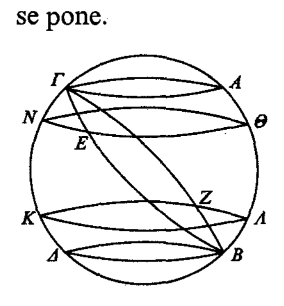
parejas [Prop. 6], entonces al levantarse E se pone Z. Luego E, partiendo de E, tras recorrer el arco EΘ, se presenta en Θ en el tiempo en que Z, partiendo de Z, tras recorrer ZK, se presenta en K. Pero cuando E, tras recorrer EΘ, se presente en Θ, el arco EΓ se levanta, mientras que cuando Z, tras recorrer ZK, se presente en K, el arco BZ se pone. Luego el arco ΓE se levanta en igual tiempo en que se pone el arco BZ.



* * *

Digo que también BZ se levanta en el tiempo en que ΓE se pone.

Así, pase al segundo caso el círculo del zodíaco y tenga la posición ΓEBZ. [Digo que BZ se levanta en el tiempo en que ΓE se pone].



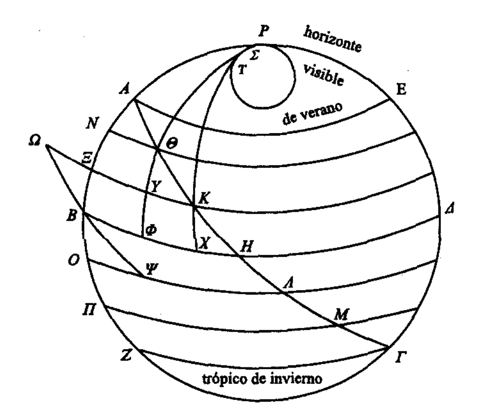
Puesto que el punto Z es diametralmente opuesto al punto E, entonces, al levantarse Z, E se pone; luego Z, tras recorrer el arco ZΛ, se presenta en Λ, en el tiempo en que E, tras recorrer el arco EN, se presentará en N. Pero cuando Z, tras recorrer el arco ZΛ, se presente en Λ, BZ se levanta; y cuando E, tras recorrer el arco EN, se presente en N, ΓE se pone. Luego el arco BZ se levanta en el tiempo en que el arco ΓE se pone.

Proposición 12

Los arcos iguales del semicírculo posterior a Cáncer se ponen en tiempos desiguales: en más tiempo los arcos que

están junto a los puntos de contacto de los trópicos, en menos los inmediatos a éstos, y en los tiempos más breves los de junto al ecuador; y los que distan lo mismo del ecuador se levantan y se ponen en igual tiempo.

En el mundo, sea ΑΒΓ el horizonte, ΡΣΤ el círculo mayor de los siempre visibles, ΑΕ el trópico de verano, ΓΖ el trópico de invierno, ΒΗΔ el ecuador y tenga el círculo del zodíaco la posición ΑΗΓ, y sea ΑΗΓ el semicírculo posterior a Cáncer



por encima de la tierra, y divídanse cada uno de los cuadrantes ΑΗ, ΗΓ en los signos por los puntos Θ, Κ, Λ, Μ.

Digo que los arcos ΑΘ, ΘΚ, ΚΗ, ΗΛ, ΛΜ, ΜΓ se ponen en tiempos desiguales, y en más tiempo ΑΘ, ΓΜ; en tiempos menores ΘΚ, ΛΜ; en el tiempo mínimo ΚΗ, ΗΛ; y ΑΘ en igual tiempo que ΜΓ; ΘΚ en igual tiempo que ΜΛ; ΚΗ en igual tiempo que ΛΗ.

Trácense por los puntos Θ, Κ, Λ, Μ los círculos paralelos ΝΘ, ΞΚ, ΟΛ, ΠΜ, y por los puntos Θ, Κ trácense los círculos máximos ΣΘΦ, ΤΚΧ tangentes a ΡΣ de manera que los arcos de los círculos paralelos entre ΑΡ, ΣΘΦ, ΤΚΧ sean semejantes

[Teod., II 13], es decir: trácense de tal manera que el semicírculo que va de P hacia la parte de A, N no llegue a coincidir con los semicírculos que pasan por los puntos Σ, T hacia la parte de X, Φ. Los arcos NΘ, ΞY, BΦ son semejantes[39] entre sí; luego también lo son los arcos YK, ΦX. De manera que en el tiempo en que Θ recorre el arco ΘN, Y recorre YΞ y Φ recorre ΦB. Y puesto que Θ recorre ΘN en el tiempo en que ΘA se pone, entonces en el tiempo en que Y recorre el arco YΞ y Φ el BΦ, ΘA se pone. A la vez, puesto que en el tiempo en que K recorre el arco KΞ y X el XB, KA se pone, entonces K recorre el arco KY —es decir, X recorre XΦ, puesto que son semejantes— en el tiempo en que KΘ se pone. Por lo mismo también, en el tiempo en que H recorre HX, HK se pone.

Así, puesto que un círculo máximo de la esfera, ABΓ, es tangente a un círculo PΣT de los de la esfera, mientras que otro círculo máximo, AHΓ, oblicuo respecto a los paralelos, es tangente a círculos mayores que aquéllos a los que es tangente ABΓ; y puesto que se han tomado arcos iguales AΘ, ΘK, KH uno a continuación del otro por la misma parte del paralelo mayor[40] BHΔ; y por los puntos Θ, K han sido trazados los círculos mayores ΣΦ, TX tangentes al círculo PΣT, al cual también era tangente el círculo ABΓ del principio, haciendo que los semicírculos que van de los puntos de contacto Σ, T hacia la parte de K, Θ no lleguen a coincidir con el semicírculo PAB del horizonte, sobre el que está el punto de

[39] El griego emplea aquí el término *katenantíon*, que está sobradamente testimoniado con el significado de «opuesto»; pero en este contexto se hace evidente a la vista de la figura, que sirve para designar arcos «correspondientes» o «semejantes».

[40] Repetidamente a lo largo de esta proposición se dará al ecuador no el nombre habitual de *isēmerinós*, sino el de *mégistos tôn parallḗlōn*, particularidad terminológica que hemos respetado.

contacto del círculo oblicuo[41] —que está entre el polo visible y el mayor de los paralelos— harán[42] desiguales los arcos que están entre ellos en el mayor de los círculos paralelos [Teod., III 8].

Luego el arco BΦ es mayor que el ΦX, y ΦX es mayor que XH. Luego el punto Φ recorre ΦB en más tiempo que X recorre ΦX. Y X recorre XΦ en más tiempo que H recorre HX; pero Φ recorre ΦB en el tiempo en que ΘA se pone, mientras que X recorre XΦ en el tiempo en que ΘK se pone y H recorre HX en el tiempo en que HK se pone. Luego AΘ se pone en más tiempo que KΘ y ΘK en más que KH[43].

* * *

Digo también que los arcos que distan lo mismo del ecuador se ponen en igual tiempo. Cambie, pues, de posición el círculo del zodíaco y preséntese H en B. Así, el zodíaco tendrá la posición ΩBΨ. Y el arco KH es igual al HΛ. Luego también ΩB es igual a BΨ. Y BHΔ es el mayor de los paralelos y ΩK, ΨΛ son círculos paralelos. Luego el círculo ΩK es igual al ΨΛ [Teod., II 17]. De manera que también el arco BΞ es igual al BO [Teod., II 18], y la cuerda[44] que va de Ω a Ξ es igual a la que va de O a Ψ [Teod., III 3]. De manera que también el arco ΩΞ es igual al OΨ. Luego Ω, partiendo de Ξ, recorre ΞΩ en el tiempo en que Ψ recorre ΨO. Pero

---

[41] BERGGREN y THOMAS anotan que este «punto de contacto del círculo oblicuo» lo es con el trópico de Cáncer. Es decir, se trata del punto A en el que coinciden la eclíptica, el trópico de Cáncer y el horizonte.

[42] El sujeto de la frase son «los círculos mayores ΣΦ, TX y el horizonte».

[43] Se interrumpe aquí la demostración de la primera parte del enunciado; se concluirá tras la demostración de la segunda parte.

[44] No aparece un término específico para la «cuerda»; se la menciona con una expresión emparentada con la que suele designar la recta, *hē apò toû O epì tò Ψ*: «la [recta, cuerda] que va de O a Ψ».

Ω, partiendo de Ξ, recorre ΞΩ en el tiempo en que ΒΩ se pone. Y Ψ recorre ΟΨ en el tiempo en que ΒΨ se pone. Luego los arcos ΩΒ, ΒΨ se ponen en igual tiempo. De manera que también ΚΗ, ΗΛ se ponen en igual tiempo. Y lo mismo ΘΚ, ΛΜ. Por lo mismo, también ΑΘ, ΜΓ se ponen en igual tiempo.

* * *

Pero ΑΘ se pone en más tiempo que ΘΚ y ΘΚ en más tiempo que ΚΗ. Luego ΓΜ se pone en más tiempo que ΜΛ y ΜΛ en más tiempo que ΛΗ.

Y lo mismo se demostrará cuando el polo de los paralelos esté en el horizonte y se tracen círculos máximos por los puntos Κ, Θ y por el polo [Teod., III 6] [trazados como en el sexto teorema del tercer libro de las *Esféricas*][45].

Luego los arcos iguales del semicírculo posterior a Cáncer se ponen en tiempos desiguales: en más tiempo, los que están junto a los puntos de contacto de los trópicos; en un tiempo menor, los inmediatos a éstos; en los tiempos mínimos, los que están junto al ecuador; y en tiempos iguales los que distan lo mismo del ecuador. De la misma manera demostraríamos también que se levantan en igual tiempo unos y otros.

Proposición 12b

En el semicírculo posterior a Cáncer los arcos iguales se ponen en tiempos desiguales: en más tiempo los que están junto a los puntos de contacto con los trópicos; en tiem-

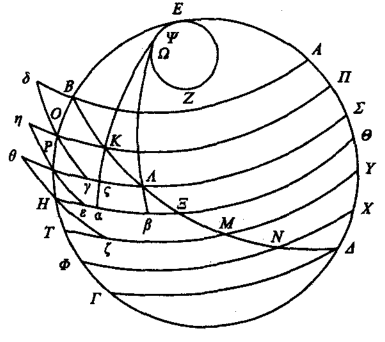
---

[45] Menge considera interpolación el pasaje entre corchetes cuadrados. Berggren y Thomas consideran que la interpolación viene desde algo más atrás, desde «Y lo mismo se demostrará»; comparto la opinión de estos últimos, pues si el pasaje fuera antiguo esta tesis se habría reflejado también en el enunciado.

pos menores, los inmediatos a éstos; en los tiempos más breves, los que están junto al ecuador; y los que están a la misma distancia del ecuador se levantan y se ponen en tiempos iguales.

Sea ΑΒΓΔ el círculo del horizonte, ΕΖ el círculo máximo de los siempre visibles, ΒΑ el trópico de verano, ΓΔ el trópico de invierno, y sea ΒΔ el semicírculo posterior a Cáncer por encima de la tierra, ΗΘ el círculo ecuatorial, y divídanse cada uno de los[46] ΒΞ, ΔΞ en tres partes iguales por los puntos Κ, Λ, Μ, Ν.

Digo que los arcos ΒΚ, ΚΛ, ΛΞ, ΞΜ, ΜΝ, ΝΔ se ponen en tiempos desiguales: en más tiempo ΒΚ y ΝΔ; en tiempos menores ΚΛ, ΜΝ; en los tiempos más breves ΛΞ, ΞΜ; y que ΛΞ se pone en el mismo tiempo que ΞΜ; ΚΛ en el mismo que ΜΝ; ΒΚ en el mismo que ΝΔ.



Sean ΟΠ, ΡΣ, ΤΥ, ΦΧ círculos paralelos por los que se desplazan los puntos Κ, Λ, Μ, Ν, y trácense por los puntos Κ, Λ los círculos máximos Ψα, Ωβ tangentes al círculo ΕΖ [Teod., II 15].

Puesto que los arcos ΒΚ, ΚΛ, ΛΞ son iguales entre sí, entonces los arcos Ηα, αβ, βΞ son mayores unos que otros, empezando por el mayor, que es Ηα [Teod., III 8]. Entonces, puesto que Ηα es mayor que αβ, y que Ηα es semejante a ΟΚ [Teod., II 13], mientras que αβ es semejante a ςΛ, entonces

[46] Se refiere a los dos cuadrantes de la eclíptica.

OK es mayor que un arco semejante a ϚΛ, mientras que OK es menor que un arco semejante a ΛP.

Sea Λγ semejante a OK; entonces, el punto K, partiendo de K, tras recorrer el arco KO, se presenta en O en el tiempo en que el punto Λ, partiendo de Λ, tras recorrer el arco Λγ, se presentará en γ, y el círculo del zodíaco tendrá su posición como γOδ. Entonces, puesto que el arco OK es semejante al γΛ, mientras que OK es semejante a PϚ [Teod., II 13], entonces PϚ también es semejante a γΛ. Y pertenecen al mismo círculo; luego PϚ es igual a γΛ. Quítese el segmento común γϚ; entonces, el restante, Pγ, es igual a ϚΛ. Y OK es mayor que un arco semejante a ϚΛ; luego OK también es mayor que un arco semejante a Pγ. Luego K, tras recorrer el arco KO, se presenta en O en más tiempo que γ, partiendo de γ, tras recorrer el arco γP, se presentará en P. Pero K, tras recorrer KO, se presenta en O en el tiempo en que se pone el arco BK, mientras que γ, tras recorrer γP, se presenta en P en el tiempo en que se pone el arco KΛ. Luego BK se pone en más tiempo que KΛ.

De nuevo, puesto que αβ es mayor que βΞ, mientras que αβ es semejante a ϚΛ, entonces también ϚΛ es mayor que un arco semejante a βΞ. Luego PΛ es mucho mayor que un arco semejante a βΞ, mientras que es menor que un arco semejante a HΞ. Sea Ξε semejante a PΛ; entonces el punto Ξ, tras recorrer el arco Ξε, se presenta en ε en igual tiempo que Λ, tras recorrer el arco ΛP, se presentará en P y el círculo del zodíaco tendrá una posición como εPη. Puesto que el arco PΛ es semejante a εΞ a la vez que PΛ es semejante a Hβ [Teod., II 13], entonces también Hβ es semejante a εΞ; y pertenecen al mismo círculo; luego el arco Hβ es igual al arco εΞ. Quítese el arco común εβ: entonces el restante Hε es igual al restante βΞ. Y puesto que ϚΛ es mayor que un arco semejante a βΞ, y ϚΛ es igual a Pγ, y βΞ es igual a Hε, entonces también

Pγ es mayor que un arco semejante a Hε; luego γ, tras recorrer el arco γP, se presenta en P en más tiempo que ε, tras recorrer εH, se presenta en H. Y γ, tras recorrer el arco γP, se presenta en P en el tiempo en que se pone el arco γO, es decir, el arco KΛ; y ε, tras recorrer εH, se presenta en H en el tiempo en que el arco εP, es decir, ΛΞ, se pone. Luego KΛ se pone en más tiempo que ΛΞ[47].

* * *

De nuevo, puesto que el arco TM es mayor que un arco semejante al HΞ, sea Mζ semejante a HΞ.

Entonces, Ξ, partiendo de Ξ, tras recorrer el arco ΞH, se presenta en H en el tiempo en que M, tras recorrer el arco Mζ, se presentará en ζ y el círculo del zodíaco tendrá la posición ζHθ. Y puesto que en la esfera los círculos paralelos TY, PΣ separan en el círculo máximo BΔ los arcos iguales ΛΞ, ΞM que están junto a HΘ, el mayor de los paralelos, PΣ es igual a TY. Y puesto que en la esfera los círculos iguales y paralelos PΣ, TY quitan del círculo máximo ABΓΔ de la esfera los arcos TH, HP que están junto al mayor de los paralelos HΘ, TH es igual a HP. Y también ζH es igual a Hθ, puesto que también ΛΞ es igual a ΞM. Luego la cuerda[48] que va de θ a P es igual a la que va de T a ζ [Teod., III 3]. Y el círculo PΣ es igual al círculo TY; luego el arco θP es igual al arco Tζ. Pero el arco θP es semejante al arco Hε; luego también el Hε es semejante al Tζ. Luego ε, partiendo de ε, tras recorrer el arco εH, se presenta en H en el tiempo en que ζ, tras recorrer ζT, se presenta en T. Pero ε se presenta en H en el tiempo en que se pone el arco εP, es decir, el arco ΛΞ. Y ζ se

[47] Como en 12a, se interrumpe la demostración de la primera parte del enunciado; se concluirá tras finalizar la demostración de la segunda parte.

[48] V. n. 40 a la proposición anterior.

presenta en T en el tiempo en que se pone ζH, es decir, ΞM. Luego el arco ΛΞ se pone en el mismo tiempo que el arco ΞM.

De la misma manera demostraríamos también que el arco KΞ se pone en igual tiempo que ΞN y, por tanto, el arco restante, KΛ, se pone en igual tiempo que MN.

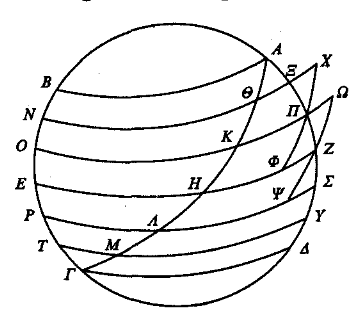
De la misma manera demostraremos también que BK se pone en igual tiempo que NΔ.

* * *

Y puesto que BK se pone en más tiempo que KΛ y KΛ en más tiempo que ΛΞ, mientras que BK se pone en el mismo tiempo que ΔN y KΛ en el mismo que MN, y ΛΞ en el mismo que ΞM, entonces también ΔN se pone en más tiempo que NM y NM en más tiempo que MΞ.

* * *

Digo también que ΛΞ se levanta en el mismo tiempo que ΞM; KΛ en el mismo que MN y BK en el mismo que NΔ.



Considérese lo dicho en la segunda figura[49] y sea AΓ el semicírculo bajo tierra posterior a Cáncer y divídase cada uno de los cuadrantes AH, HΓ en tres partes iguales por los puntos Θ, K, Λ, M y sean NΞ, OΠ, PΣ, TY círculos paralelos por los que se desplazan Θ, K, Λ[50], M.

Puesto que el arco ZH es mayor que uno semejante a KΠ, sea HΦ semejante a KΠ. Entonces, K, partiendo de K, tras recorrer el arco KΠ, se presenta en Π en el tiempo en que H,

[49] La figura que reproducimos junto a estas líneas.

[50] Por errata aparece A en lugar de Λ en el texto griego de Menge.

partiendo de Η, tras recorrer el arco ΗΦ, se presentará en Φ y el círculo del zodíaco tendrá la posición ΦΠΧ. A la vez, puesto que ΛΣ es mayor que un arco semejante a ΗΖ, sea ΛΨ semejante a ΗΖ. Entonces Η, tras recorrer el arco ΗΖ, se presenta en Ζ en el tiempo en que Λ, tras recorrer el arco ΛΨ, se presentará en Ψ y el círculo del zodíaco tendrá la posición ΨΖΩ. Y puesto que en la esfera los círculos paralelos ΟΠ, ΡΣ separan de un círculo máximo ΑΓ los arcos iguales ΛΗ, ΗΚ que están junto al mayor de los paralelos ΕΖ, el círculo ΟΠ es igual al ΡΣ [Teod., II 17]. Puesto que en la esfera los círculos iguales y paralelos ΠΟ, ΡΣ quitan de la circunferencia de un círculo máximo ΑΒΓΔ los arcos ΣΖ, ΖΠ que están junto al mayor de los paralelos, ΕΖ, el arco ΣΖ es igual al ΖΠ [Teod., II 18]. Y ΨΖ es igual a ΖΩ; luego también la cuerda que va de Π a Ω es igual a la que va de Ψ a Σ [Teod., III 3]. Y el círculo ΟΠ es igual al ΡΣ; luego el arco ΠΩ es igual al ΨΣ. Puesto que el semicírculo que va de Χ hacia la parte de Χ, Π no es concurrente con el semicírculo que va de Ω hacia la parte de Ω, Ζ, el arco ΠΩ es semejante al arco ΦΖ [Teod., II 13]. Pero ΠΩ es semejante a ΨΣ; luego también ΦΖ es semejante a ΨΣ; por tanto, Φ, tras recorrer ΦΖ, se presenta en Ζ en el tiempo en que Ψ, tras recorrer ΨΣ, se presenta en Σ. Pero cuando Φ se presente en Ζ, se levanta el arco ΠΦ, es decir, el ΚΗ. Y cuando Ψ se presente en Σ, se levanta el arco ΨΖ, es decir, el ΛΗ. Luego ΚΗ se levanta en el mismo tiempo que ΛΗ.

De la misma manera demostraríamos también que ΚΘ se levanta en el mismo tiempo que ΛΜ y ΑΘ en el mismo que ΜΓ.

Luego en el semicírculo posterior a Cáncer los arcos iguales se ponen en tiempos desiguales: en más tiempo los de junto a los puntos de contacto con los trópicos; en tiempos menores los inmediatos a éstos; en los más pequeños los que están junto al ecuador; y los que distan lo mismo del círculo ecuatorial se ponen y se levantan en tiempos iguales.

Proposición 13

En el semicírculo posterior a Capricornio los arcos iguales se levantan en tiempos desiguales; y en más tiempo los que están junto al punto de contacto con los trópicos; en tiempos menores, los inmediatos a éstos; en los tiempos mínimos los que están junto al ecuador; y los arcos que distan lo mismo del ecuador se levantan y se ponen en tiempos iguales[51].

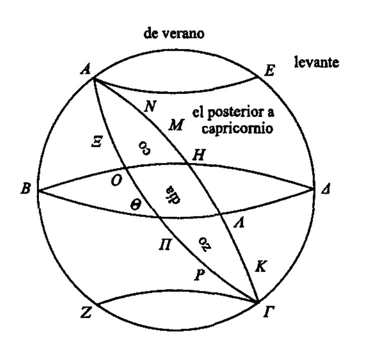
En el mundo, sea ABΓ el horizonte, AE el trópico de verano, ΓZ el trópico de invierno, BΔ el ecuador y tenga el círculo del zodíaco la posición AHΓΘ, y sea ΓHA el semicírculo posterior a Capricornio por debajo de la tierra y divídanse cada uno de los cuadrantes bajo tierra ΓH, HA en los signos por los puntos K, Λ, M, N.

Digo que los arcos ΓK, KΛ, ΛH, HM, MN, NA se levantan en tiempos desiguales: y en más tiempo los arcos ΓK, NA; en tiempos menores KΛ, MN; y en los tiempos mínimos ΛH, HM; mientras que ΓK lo hace en un tiempo igual a NA; KΛ en un tiempo igual a MN; ΛH en un tiempo igual a HM.

Divídanse también cada uno de los cuadrantes AΘ, ΘΓ del semicírculo posterior a Cáncer en los signos por los puntos Ξ, O, Π, P. Luego el círculo habrá sido dividido en doce partes iguales, y es evidente que los arcos AΞ, ΞO, OΘ, ΘΠ, ΠP, PΓ son iguales y opuestos a los ΓK, KΛ, ΛH, HM, MN, NA. Y puesto que en el semicírculo posterior a Cáncer los arcos iguales no se ponen en tiempos iguales, sino en los tiempos mayores los que están junto a los puntos de con-

[51] La demostración es inmediata a partir de lo ya desarrollado en Prop. 6 y 12.

tacto con los trópicos; en un tiempo menor, los inmediatos a éstos, y en los tiempos mínimos, los que están junto al ecuador, mientras que los que distan lo mismo del ecuador se ponen en igual tiempo [Prop. 12], entonces, AΞ, PΓ se ponen en el tiempo más largo; ΞO, ΠP en un tiempo menor; y OΘ, ΘΠ en el tiempo mínimo; y AΞ se pone en el mismo tiempo que PΓ; ΞO, en el mismo que ΠP; y OΘ en el mismo que ΘΠ. Pero AΞ, ΞO, OΘ, ΘΠ, ΠP, PΓ se ponen en el mismo tiempo en que se levantan ΓK, KΛ, ΛH, HM, MN, NA. Luego ΓK, NA se levantan en el tiempo más largo; en uno menor KΛ, MN; en el tiempo mínimo AH, HM; y AN se levanta en el mismo tiempo que ΓK; MN en el mismo que KΛ; HΛ en el mismo que MH [Prop. 12]. Y puesto que OΘ se levanta en el mismo tiempo que ΘΠ [Prop. 12] y que OΘ se levanta en el mismo tiempo en que ΛH se pone, y ΘΠ se levanta en el mismo tiempo en que HM se pone [Prop. 11], entonces HΛ se pone en el mismo tiempo que HM. Por la misma razón también MN se levanta en el mismo tiempo que ΛK y NA en el mismo tiempo que KΓ.



Lema[52]

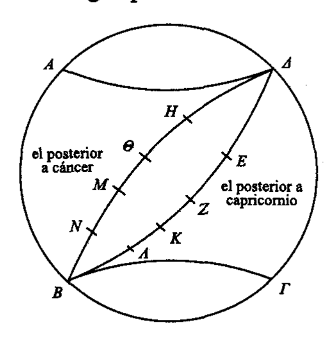
En el círculo del zodíaco, los arcos iguales y que distan lo mismo del punto de contacto con el trópico por cada lado

[52] Este lema aparece como tal en algunos de los mss. de la versión *a*, y como una más de las demostraciones en otros (V l L), mientras que en los mss. de la versión *b* figura como escolio en los más antiguos y como lema en los más recientes.

se levantan el uno en el mismo tiempo en que se pone el otro y viceversa.

En el mundo, sea el círculo ΑΒΓΔ el horizonte, el de verano ΑΔ[53], el de invierno ΒΓ, tenga el círculo del zodíaco la posición ΒΕΔ, y tómense los arcos iguales y que distan lo mismo del punto de contacto con el trópico ΕΖ, ΗΘ.

Digo que ΕΖ se levanta en el tiempo en que ΗΘ se pone.



Supóngase que el semicírculo ΒΘΔ posterior a Cáncer se pone. Tómese, en el semicírculo posterior a Capricornio, el arco ΚΛ que sea igual y opuesto a ΗΘ. Entonces, ΚΛ, ΕΖ, que distan lo mismo del ecuador y de los puntos de contacto con los trópicos se levantan en el mismo tiempo [Prop. 12]. Pero ΚΛ se levanta en el mismo tiempo en que su opuesto, ΘΗ, se pone [Prop. 11]. Y ΕΖ se levanta en el mismo tiempo en que ΘΗ se pone y viceversa. Q. E. D.]

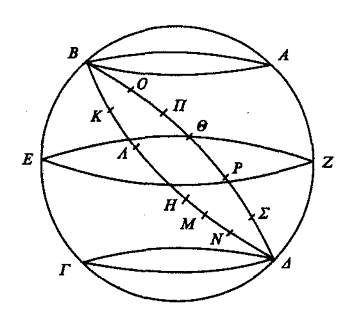
Proposición 13b

En el semicírculo posterior a Capricornio los arcos iguales se levantan en tiempos desiguales: en los tiempos más largos los que están junto a los puntos de contacto con los trópicos; en tiempos menores los inmediatos a éstos; en los tiempos más breves los de junto al ecuador; y los que distan lo mismo del círculo ecuatorial se levantan y se ponen en igual tiempo.

53 Entiéndase «trópico de verano».

Sea ABΓΔ el círculo del horizonte, BA el trópico de verano, ΓΔ el trópico de invierno, y sea ΔHB el semicírculo posterior a Capricornio bajo tierra y EΘHZ el círculo ecuatorial, y divídanse cada uno de los cuadrantes BH, HΔ en tres partes iguales por los puntos K, Λ, M, N.

Digo que los arcos BK, KΛ, ΛH, HM, MN, NΔ se levantan en tiempos desiguales: en los tiempos mayores BK, NΔ; en tiempos menores KΛ, MN; y en los tiempos más pequeños ΛH, HM; y BK se levanta y se pone en el mismo tiempo que NΔ, y KΛ en el mismo que MN y ΛH en el mismo que HM.



Sea BΘΔ el semicírculo posterior a Cáncer por encima de la tierra, y divídase cada uno de los cuadrantes BΘ, ΘΔ en tres partes iguales por los puntos O, Π, P, Σ. Puesto que BO se pone en más tiempo que OΠ [Prop. 12], mientras que en el tiempo en que BO se pone, ΔN se levanta y en el tiempo en que OΠ se pone, MN se levanta [Prop. 11], entonces NΔ se levanta en más tiempo que NM.

A la vez, puesto que OΠ se pone en más tiempo que ΠΘ, mientras que OΠ se pone en el tiempo en que NM se levanta y ΠΘ se pone en el tiempo en que HM se levanta, entonces NM se levanta en más tiempo que MH. Por lo mismo, efectivamente, BK se levanta en más tiempo que KΛ, y KΛ en más tiempo que ΛH. Y puesto que ΠΘ se pone en el mismo tiempo que ΘP [Prop. 12], mientras que en el tiempo en que ΠΘ se pone, MH se levanta y en el tiempo en que ΘP se pone HΛ se levanta, también, entonces, MH se levanta en el mismo tiempo que HΛ. Por lo mismo, efectivamente, también KΛ se levanta en el mismo tiempo que MN, y BK en el mismo que ΔN.

De nuevo, puesto que ΠΘ se levanta en el mismo tiempo que ΘΡ [Prop. 12], mientras que ΠΘ se levanta en el tiempo en que MH se pone, y ΘΡ se levanta en el tiempo en que HΛ se pone, entonces ΛH se pone en el mismo tiempo que HM. Por lo mismo, efectivamente, también KΛ se pone en el mismo tiempo que MN, y BK en el mismo que ΔN.

Proposición 14

En el círculo del zodíaco, los arcos iguales no cumplen su curso por el hemisferio visible en el mismo tiempo, sino siempre el arco más próximo al trópico de verano en más tiempo que el más lejano, cuando el cénit esté entre el círculo ártico y el trópico de verano[54].

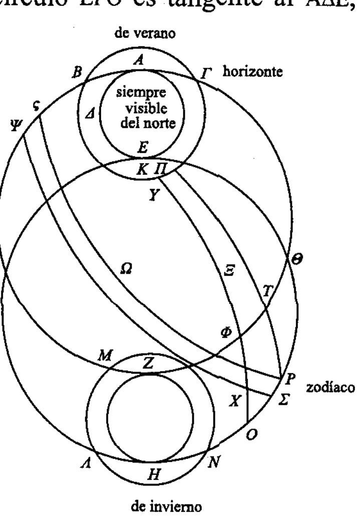
En el mundo, sea ABΓ el horizonte, AΔ el círculo máximo de los siempre visibles, ZH el de los siempre invisibles, y sea BΓK el trópico de verano y el de invierno ΛMN, y tenga el círculo del zodíaco la posición KΞO unas veces, y otras, la posición ΠTP, y señálese el arco KO no mayor que un semicírculo y por el punto E trácese un círculo máximo tangente al círculo AΔE. También es tangente a ZH. Efectivamente, [el círculo EHΘ] pasará por K o K caerá fuera por la parte de B, que da lo mismo. Sea EHΘ y no sea concurrente el semi-

[54] Es decir, la afirmación es válida para observaciones realizadas desde la zona templada del hemisferio norte. El nombre «círculo ártico», como dejamos señalado más arriba (cf. n. 6), se usa con mucha menos frecuencia que el de «círculo máximo de los siempre visibles». Berggren y Thomas hacen notar que la situación propuesta en la hipótesis de esta proposición es la más restrictiva de toda la obra, si bien, como hemos hecho notar en otras ocasiones, las latitudes son, aproximadamente, aquéllas para las que los astrónomos de la antigüedad podían tener observaciones fiables.

círculo que va de E a la parte de P con el semicírculo que va de A hacia la parte de B.

Puesto que el polo del círculo ABΓ está entre los círculos AΔE y BKΓ y se han trazado círculos que cortan al círculo BAΓ, entonces el arco ΥΦ[55] es menor que el ΥΠΤ.

A la vez, puesto que el polo del círculo ABΓ está entre los círculos AΔE, BKΓ y el círculo EPO es tangente al AΔE, entonces también el polo de EPO está entre los círculos AΔE, BKΓ. Luego su otro polo está entre los círculos ZH, MNΛ; por tanto, el arco ΥΦO es mayor que el ΥΠP; y ΥΦ es menor que ΥΠΤ; luego el arco restante OΦ es mayor que PT.



Pónganse los arcos iguales y semejantes TP, ΦX y sean ΨXΣ, ϚΩP círculos paralelos por los que se desplazan los puntos P, X; entonces, los arcos ΨXΣ, ϚΩP son semejantes; y Σ recorre el arco ΣXΨ en el mismo tiempo en que P recorre el arco PΩϚ. Luego el punto P recorre el arco PΩϚ en más tiempo que en el que X recorre ΨX. Pero P recorre el arco PΩϚ en el mismo tiempo en que PT completa su curso por el hemisferio visible; y X recorre XΨ en el mismo tiempo en que ΦX completa su curso por el hemisferio visible; luego TP completa su curso por el hemisferio visible en más tiempo que ΦX.

[55] El texto no indica la localización exacta del punto Υ; para BERGGREN y THOMAS indicaría la intersección de KΦ y la prolongación de PΠ.

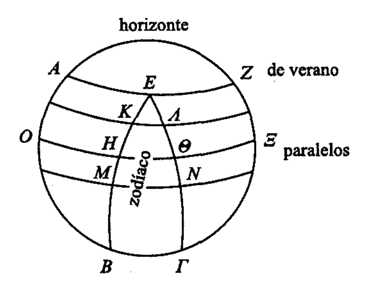
* * *

De la misma manera, tampoco los arcos iguales del otro semicírculo completan su curso por el hemisferio visible en igual tiempo, sino siempre en más tiempo el arco más próximo al punto de contacto del trópico de verano que el más lejano, y en igual tiempo los que distan lo mismo por cada lado del punto de contacto.

En el mundo, sea ABΓ el horizonte, AEZ el trópico de verano, y tenga el círculo del zodíaco la posición BEΓ, y tómense los arcos iguales KH, HM.

Digo que KH completa su curso por el hemisferio visible en más tiempo que HM.

Trácense los círculos paralelos KΛ, HΘ, MN por los que se desplazan los puntos K, H, M. Así, los arcos KH, ΛΘ son iguales [Teod., II 13] y distan lo mismo por cada lado del punto de contacto. Y puesto que el arco ΛΘ se levanta en el tiempo en que el arco KH se pone, y el punto Θ, partiendo de Ξ, recorre ΞΘO en el mismo tiempo en que H, partiendo de Ξ, recorre ΞΘO, entonces el tiempo en que ΛΘ se levanta, añadiéndole el tiempo en que Θ, partiendo de Ξ, recorre ΞΘO, es igual al tiempo en que H, partiendo de Ξ, recorre ΞHO, añadiéndole el tiempo en que HK se pone. Pero el tiempo en que ΛΘ se levanta añadiéndole el tiempo en que Θ, partiendo de Ξ, recorre el arco ΞΘO, es el tiempo en que ΛΘ completa su curso por el hemisferio visible. Y el tiempo en que H, partiendo de Ξ, recorre ΞHO, añadiéndole el tiempo en que KH se pone, es el tiempo en que KH completa su curso por el hemisferio visible. Luego ΛΘ, KH completan su curso por

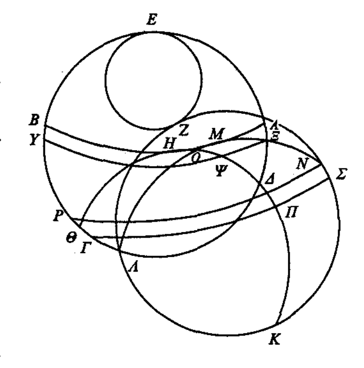


el hemisferio visible en igual tiempo. Y por la misma razón también ΘN y HM completan su curso por el hemisferio visible en el mismo tiempo. ΛΘ, sin embargo, completa su curso por el hemisferio visible en más tiempo que ΘN —pues se había demostrado en el teorema anterior—. Luego KH completa su curso por el hemisferio visible en más tiempo que HM. Y ha quedado demostrado simultáneamente que los arcos que distan lo mismo por cada lado del punto de contacto completan su curso por el hemisferio visible en igual tiempo.

Proposición 14b

En el círculo del zodíaco los arcos iguales no completan su curso por el hemisferio visible en tiempos iguales, sino el más próximo al punto de contacto con el trópico de verano en un tiempo mayor que el más lejano, cuando el cénit esté entre el ártico y el trópico de verano

Sea ABΓΔ el círculo del horizonte, y sea EZ el mayor de los círculos siempre visibles y BA el trópico de verano y esté el polo de ABΓΔ entre EZ, BA, y tenga el círculo del zodíaco unas veces la posición ΘHK, y otras ΛMN, y tómese el arco HK que no sea mayor que un semicírculo, y trácese por el punto K un círculo máximo KNZ tangente a EZ.



Puesto que en la esfera el círculo máximo ABΓΔ es tangente a un círculo EZ y corta a BA, paralelo al anterior, y el polo de ABΓΔ está entre AB,

EZ y han sido trazados los círculos máximos ΘHK, ΛMN tangentes a BA, el arco OMΞ es mayor que el arco OΔ. A la vez, puesto que en la esfera el círculo máximo ABΓΔ es tangente a un círculo EZ y corta a BA, paralelo al anterior, y el polo del círculo ABΓΔ está entre BA, EZ y ha sido trazado un círculo máximo ZNK tangente a EZ, entonces también el polo del círculo ZNK está entre EZ, BA; luego su otro polo está entre los círculos que son iguales y paralelos a EZ, BA. Luego KO es mayor que OMN, de las cuales ΞMO es mayor que OΔ; luego el arco restante ΔK es mayor que ΞN. Póngase ΔΠ igual a NΞ, y sean NP, ΓΠΣ círculos paralelos por los que se desplazan los puntos N, Π. Puesto que el semicírculo que va de E hacia la parte de E, P no es concurrente con el semicírculo que va de Z hacia la parte de Z, N, entonces el arco NP es semejante al arco ΓΣ [Teod., II 13]; luego NP es mayor que un arco semejante a ΓΠ [Teod., II 20]; luego el punto N, partiendo de N, tras recorrer el arco NP, se presenta en P en más tiempo que Π, partiendo de Π, tras recorrer el arco ΠΓ, se presenta en Γ. Pero N, tras recorrer el arco NP, se presenta en P en el mismo tiempo en que NΞ completa su curso por el hemisferio visible; y Π, partiendo de Π, tras recorrer ΠΓ, se presenta en Γ en igual tiempo en que ΠΔ completa su curso por el hemisferio visible. Luego ΞN completa su curso por el hemisferio visible en más tiempo que ΔΠ.

* * *

Digo también que el arco ΞN está más próximo al punto de contacto con el trópico de verano que ΠΔ.

Trácese por el punto Ξ el círculo paralelo ΞY; entonces, el arco ΞM es igual al HΨ [Teod., II 13]; luego HΔ es mayor que MΞ; luego ΞN está más próximo al punto de contacto con el trópico de verano que ΠΔ.

* * *

Del mismo modo, también en el otro semicírculo los arcos iguales completan su curso por el hemisferio visible en tiempos desiguales: el más próximo al punto de contacto con el trópico de verano en más tiempo que el más lejano; y en igual tiempo los arcos de cada uno de los semicírculos que distan lo mismo del trópico de verano.

Sea ΑΒΓΔ el círculo del horizonte y ΕΖ el círculo máximo de los siempre visibles, y ΒΗΑ el trópico de verano y tenga el círculo del zodíaco la posición ΓΗΔ.

Digo que también en el otro semicírculo, el que va hacia la parte de Η, Γ, los arcos iguales no completan su curso por el hemisferio visible en tiempos iguales, sino el más próximo al punto de contacto con el trópico de verano en más tiempo que el más lejano, pero en igual tiempo los arcos de cada uno de los semicírculos que distan lo mismo del trópico de verano.

Trácese el círculo paralelo ΔΘ; entonces, ΚΗ es igual al ΗΔ [Teod., II 13]. Y cambie de lugar el círculo del zodíaco y tenga la posición ΘΛΡ. Puesto que los arcos ΚΗ, ΗΔ distan lo mismo del punto de contacto con el trópico de verano, ΔΗ se levanta en el tiempo en que se pone ΚΗ, es decir, ΛΘ. Pero el tiempo en que se levanta ΔΗ es el tiempo en que el punto Η, partiendo de Α, tras recorrer el arco ΑΗ, se presenta en Η; y el tiempo en que ΛΘ se pone es el tiempo en que Λ, partiendo de Λ, tras recorrer el arco ΛΒ, se presenta en Β. Luego Η, tras recorrer ΑΗ, se presenta en Η en el tiempo en que Λ, tras recorrer el arco ΛΒ, se presenta en Β. Añádase a ambos el tiempo en que Δ, partiendo de Δ, tras recorrer ΔΡΚΘ, se presenta en Θ. Entonces, el tiempo en que Η, partiendo de Α, tras recorrer el arco ΑΗ, se presenta en Η más el tiempo en

que Δ, partiendo de Δ, tras recorrer el arco ΔΘ, se presenta en Θ, es igual al tiempo en que Λ, partiendo de Λ, tras recorrer el arco ΛΒ, se presenta en Β más el tiempo en que Θ, partiendo de Δ, tras recorrer el arco ΔΚΘ, se presenta en Θ. Pero el tiempo en que Η, partiendo de Α, tras recorrer el arco ΑΗ, se presenta en Η más el tiempo en que Δ, partiendo de Δ, tras recorrer el arco ΔΘ, se presenta en Θ, es el tiempo en que el arco ΗΔ completa su curso por el hemisferio visible, mientras que el tiempo en que Λ, partiendo de Λ, tras recorrer el arco ΛΒ, se presenta en Β más el tiempo en que Θ, partiendo de Δ, tras recorrer el arco ΔΡΘ, se presenta en Θ es el tiempo en que completa su curso por el hemisferio visible ΛΘ, es decir, ΚΗ. Luego el arco ΚΗ completa su curso por el hemisferio visible en el mismo tiempo que ΗΔ.

* * *

Tómese un punto Μ de manera que el arco ΗΔ sea igual a ΔΜ, y sea ΜΞΝΟ el círculo paralelo por el que se desplaza el punto Μ. Entonces, ΔΜ es igual a ΚΠ [Teod., III 3], y ΔΜ, ΚΠ distan lo mismo del punto de contacto con el trópico de verano. Entonces, el arco ΔΜ se levanta en el mismo tiempo en que se pone ΠΚ [Prop. 11], es decir, ΘΟ. Pero el tiempo en que ΔΜ se levanta es el tiempo en que Μ, partiendo de Μ, tras recorrer el arco ΜΞ, se presenta en Ξ. Y el tiempo en que ΘΟ se pone es el tiempo en que Ο, partiendo de Ν, tras recorrer el arco ΝΟ, se presenta en Ο. Luego el tiempo en que Μ, partiendo de Μ, tras recorrer el arco ΜΞ, se presenta en Ξ es el mismo que el tiempo en que Ο, partiendo de Ν, tras recorrer el arco ΝΟ, se presenta en Ο. Añádase en común el tiempo en que Ξ, partiendo de Ξ, tras recorrer el arco ΞΝ, se presenta en Ν. Entonces el tiempo en que Μ, partiendo de Μ, tras recorrer el arco ΜΝ, se presenta en Ν, es igual al tiempo en que Ο, partiendo de Ξ, tras recorrer el arco ΞΟ,

se presenta en O. Pero el tiempo en que M, partiendo de M, tras recorrer el arco MN, se presenta en N es el tiempo en que el arco ΔM completa su curso por el hemisferio visible. Y el tiempo en que O, partiendo de Ξ, tras recorrer el arco ΞO, se presenta en O es el tiempo en que OΘ, es decir, KΠ, completa su curso por el hemisferio visible. Luego ΔM completa su curso por el hemisferio visible en el mismo tiempo que KΠ. Y puesto que HΔ completa su curso por el hemisferio visible en más tiempo que ΔM, mientras HΔ completa su curso por el hemisferio visible en el mismo tiempo que HK, y ΔM en el mismo que KΠ, entonces HK completa su curso por el hemisferio visible en más tiempo que KΠ.

Proposición 15

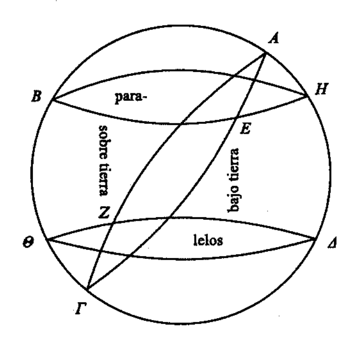
En el círculo del zodíaco, los arcos iguales y opuestos, en el tiempo en que uno completa su curso por el hemisferio visible, el otro lo completa por el invisible, y en el tiempo en que uno completa su curso por el invisible, el otro por el visible.

En el mundo, sea ABΓ el horizonte, y tenga el círculo del zodíaco la posición ZAEΓ, y tómense los arcos iguales y opuestos AE, ΓZ.

Digo que AE completa su curso por el hemisferio visible en el mismo tiempo en que ΓZ por el invisible, y a la inversa: AE completa su curso por el hemisferio invisible en el tiempo en que ΓZ por el visible.

Esté bajo tierra el semicírculo AEΓ y sean EHB, ZΘΔ círculos paralelos por los que se desplazan los puntos E, Z. Y puesto que los astros que están diametralmente opuestos en el círculo del zodíaco se levantan y se ponen por parejas

[Prop. 6], al ponerse E en el punto B, el que le es diametralmente opuesto, Z, se levanta por Δ. Luego E, tras recorrer el arco EHB, se presenta en B en el tiempo en que Z, tras recorrer el arco ZΘΔ, se presenta en Δ. Y el tiempo en que E, tras recorrer el arco EHB, se presenta en B, es el tiempo en que el arco AE completa su curso por el hemisferio visible; y el tiempo en que Z recorre ZΘΔ es el tiempo en que ΓZ completa su curso por el hemisferio invisible.



Luego AE completa su curso por el hemisferio visible en el tiempo en que ΓZ por el invisible.

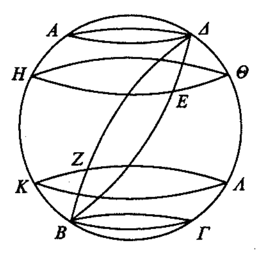
Preposición 15b

[El enunciado del teorema es común a las dos recensiones.]

En el mundo, sea ABΓΔ el horizonte y sea AΔ el trópico de verano y BΓ el trópico de invierno, y tenga el círculo del zodíaco la posición ΔEBZ, y sea ΔEB el semicírculo posterior a Cáncer bajo tierra, y BZΔ el posterior a Capricornio por encima de tierra, y sea la parte de Δ la de levante y la de B la de poniente, y tómense los dos arcos iguales y opuestos ΔE, BZ.

Digo que ΔE completa su curso por el hemisferio visible en el tiempo en que ZB por el invisible, y que ΔE completa su curso por el invisible en el tiempo en que BZ por el visible.

Trácense los círculos paralelos HEΘ, KZΛ, por los que se desplazan los puntos E, Z. Y puesto que en el círculo del zodíaco los astros que están diametralmente opuestos se levantan y se ponen por parejas [Prop. 6], entonces, al ponerse el punto E por el punto H, el diametralmente opuesto a él, Z, se levanta por el punto Λ. Y E se pone tras haber recorrido el arco EΘH, y Z se levanta tras haber recorrido ZKΛ; luego en el tiempo en que E recorre el arco EΘH, también Z recorre ZKΛ. Pero el tiempo en que E recorre EΘH es el tiempo en que ΔE completa su curso por el hemisferio visible; y el tiempo en que Z recorre ZKΛ es el tiempo en que ZB completa su curso por el hemisferio invisible; luego ΔE completa su curso por el hemisferio visible en el mismo tiempo en que ZB por el invisible.

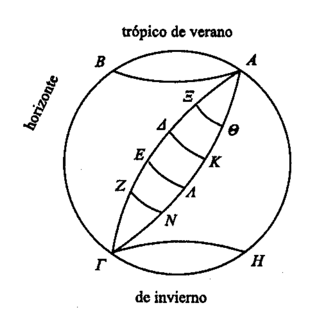


De la misma manera demostraríamos también que ΔE completa su curso por el hemisferio invisible en el mismo tiempo que ZB por el visible.

Proposición 16

En el círculo del zodíaco, los arcos iguales no completan su curso por el hemisferio invisible en el mismo tiempo, sino siempre en más tiempo el que está más cerca del punto de contacto con el trópico de invierno que el más lejano, pero en el mismo tiempo los que distan del punto de contacto lo mismo por cada lado.

En el mundo, sea ΑΒΓ el horizonte, y tenga el círculo del zodíaco la posición ΑΖΓ, y tómense los arcos iguales ΔΕ, ΕΖ.



Digo que los arcos ΔΕ, ΕΖ no completan su curso por el hemisferio invisible en igual tiempo, sino ΖΕ en más tiempo que ΕΔ.

Sea el arco ΘΚ igual y opuesto al ΖΕ, y el ΚΛ igual y opuesto al ΕΔ. Entonces ΘΚ es igual a ΚΛ. Y puesto que ΚΘ completa su curso por el hemisferio visible en más tiempo que ΚΛ, *** [56]

Proposición 16b

En el círculo del zodíaco los arcos iguales no completan su curso por el hemisferio invisible en igual tiempo, sino siempre en más tiempo el más próximo al trópico de invierno que el más lejano, y en igual tiempo los arcos que distan lo mismo de cada uno de los puntos de contacto [57].

En el mundo, sea ΑΒΓ el horizonte, y sea ΑΒ el trópico de verano y sea ΓΤ el trópico de invierno, y tenga el círculo del zodíaco la posición ΑΓΕ, y tómense los arcos iguales ΔΕ, ΕΖ.

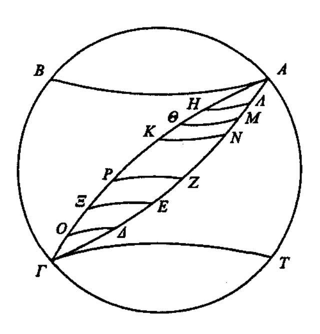
---

[56] Aquí concluye el texto de los manuscritos que nos ofrecen la versión *a*. La versión completa de la proposición 16 y las que le siguen se conservan sólo en los manuscritos de la versión *b*.

[57] El contenido de la presente proposición se sigue de lo demostrado en 14 y 15.

Digo que ΔE, EZ no completan su curso por el hemisferio invisible en igual tiempo, sino el arco ΔE en más tiempo que el arco EZ.

Tómense pues los arcos HΘ, ΘK iguales y opuestos a los arcos ΔE, EZ; entonces, los arcos HΘ, ΘK no completan su curso por el hemisferio visible en igual tiempo, sino en más tiempo HΘ que KΘ [Prop. 14]. Y HΘ completa su curso por el hemisferio visible en el tiempo en que ΔE por el invisible, mientras que ΘK completa su curso por el hemisferio visible en el tiempo en que EZ por el invisible [Prop. 15]; luego los arcos ΔE, EZ no completan su curso por el hemisferio visible en igual tiempo, sino en más tiempo ΔE que EZ.



* * *

Digo también que los que distan lo mismo de cada uno de los puntos de contacto con los trópicos en igual tiempo [completan su curso por el hemisferio invisible][58].

Sean pues ΔO, EΞ, ZP, KN, ΘM, HΛ los círculos paralelos por los que se desplazan los puntos Δ, E, Z, K, Θ, H; entonces, los arcos HΘ, ΛM completan su curso por el hemisferio visible en igual tiempo [Prop. 14]; pero HΘ completa su curso por el hemisferio visible en el tiempo en que ΔE completa su curso por el invisible [Prop. 15]. Y ΛM completa su curso por el hemisferio visible en el tiempo en que ΞO por el invisible; luego los arcos EΔ, OΞ completan su curso por el hemisferio invisible en igual tiempo.

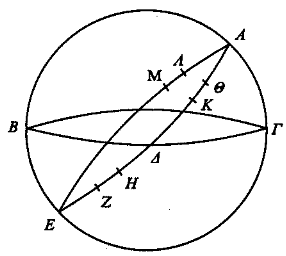
[58] El contenido que figura entre corchetes es adición de Menge.

PROPOSICIÓN 17b

De los arcos iguales por cada lado del ecuador y que distan lo mismo del ecuador[59]*, el uno completa su curso por el hemisferio visible en el tiempo en que el otro por el invisible, y el uno completa su curso por el hemisferio visible en el tiempo en que el otro por el visible*[60].

En el mundo, sea ABΓ el horizonte, BΔΓ el círculo del ecuador, tenga el círculo del zodíaco la posición AEΘ y sean ΘK, ZH arcos iguales por cada lado y que distan lo mismo del ecuador.

Digo que ΘK completa su curso por el hemisferio visible en el tiempo en que ZH por el invisible.



Póngase el arco ΛM igual y opuesto al ZH; entonces, los arcos MΛ, ΘK completan su curso por el hemisferio visible en igual tiempo; pero MΛ completa su curso por el hemisferio visible en el tiempo en que ZH completa su curso por el invisible [Prop. 15]; y el arco ΘK completa su curso por el hemisferio visible en el tiempo en que el arco HZ completa su curso por el invisible. Y por la misma razón también el arco ΘK completa su curso por el hemisferio invisible en el tiempo en que HZ completa su curso por el visible.

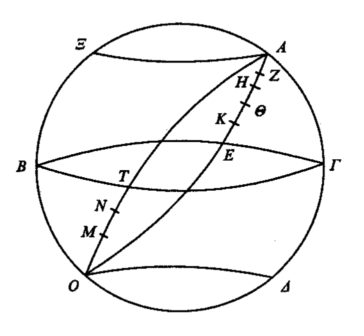
[59] Estos arcos iguales deben estar situados en el círculo del zodíaco, como se deduce de la demostración y de los enunciados del resto del tratado.

[60] Al igual que ocurría con la Prop. 16, también la presente se sigue de lo demostrado en 14 y 15.

Proposición 18b

De los arcos iguales que están en el semicírculo comprendido por el ecuador hasta el trópico de verano uno de ellos completa su curso por el hemisferio visible en más tiempo que el restante el invisible, y [eso le ocurre a] un [arco] cualquiera de un [arco]cualquiera[61].

En el mundo, sea ΑΒΓ el horizonte, y sea ΑΞ el trópico de verano y ΔΟ el de invierno, y sea ΒΕΓ el círculo del ecuador, y tenga el círculo del zodíaco la posición ΑΕΟ, y en el semicírculo ΤΑΕ sean ΖΗ, ΘΚ arcos iguales, y sea ΖΗ más próximo al trópico de verano.



Digo que ΗΖ completa su curso por el hemisferio visible en más tiempo que ΘΚ el invisible, y [eso le ocurre a] un [arco] cualquiera de un [arco]cualquiera.

[61] Naturalmente, al hablar de arcos iguales hay que excluir el caso, suficientemente tratado, de los arcos que distan lo mismo por cada parte del punto de contacto con los trópicos. En el enunciado falta la precisión de que uno de los arcos ha de estar situado más cerca del trópico de verano que el otro, pero esto queda claro más adelante, al describir el caso en los términos que corresponden a la figura. La proposición presenta, a mi entender, algunas dificultades de orden lingüístico y terminológico: es el único lugar del tratado en que aparecen las expresiones *hē tychoúsa* (literalmente «uno cualquiera») y *hē loipḗ* (literalmente «el restante») para referirse a arcos; se hace difícil captar su significado con exactitud; así lo hacen ver Berggren y Thomas, que silencian el pasaje en su versión.

Póngase el arco MN igual y opuesto al arco ΘK; entonces, ZH está más próximo al trópico de verano que MN; luego ZH completa su curso por el hemisferio visible en más tiempo que MN el visible [Prop. 14]. Pero el arco MN completa su curso por el hemisferio visible en el tiempo en que ΘK por el invisible [Prop. 15]; luego el arco ZH completa su curso por el hemisferio visible en más tiempo que ΘK por el invisible.

Igualmente demostraremos también que [un arco] cualquiera de [un arco] cualquiera completa su curso por el hemisferio visible en más tiempo que el restante el invisible[62].

Igualmente, también de los arcos iguales del otro semicírculo comprendido por el ecuador hasta el trópico de invierno el uno completa su curso por el hemisferio invisible en más tiempo que el restante el suyo por el visible y [eso le ocurre a] una parte cualquiera de un arco cualquiera.

[62] El aserto, tal y como está expresado, es falso; para admitirlo como válido tendríamos que sobreentender la misma precisión que en el enunciado. Lo mismo sucede con la frase final de la proposición.

ÍNDICE GENERAL

